Kap. 12 i Kalkulus

12.1 Konvergens av rekker

1. En rekke er en uendelig sum av tall
   Vi skriver $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots$
2. $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ kalles en delsum av rekken
3. Hvis $\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} (a_1 + \cdots + a_n)$ eksisterer
   sier vi at rekken konverger.
   Ellers sier vi at den divergerer.
4. Grenseverdien (ofte kalt s) kalles summen av rekka.
5. En geometrisk rekke er en rekke på formen $a + ar + ar^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} ar^n$

Setning 12.1.1 Den geometriske rekken $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$ konvergerer hvis og bare hvis $|r| < 1$.
Summen av rekka er da $s = \frac{a}{1-r}$

Bevis: At rekka divergerer når $|r| \geq 1$ følger fra divergenstesten (se under).
Ellers skriver vi
$$S_n = a + ar + \cdots + ar^{n-1}$$
$$rS_n = \qquad ar + \cdots + ar^{n-1} + ar^n$$

Trekker disse fra hverandre:

$$S_n - rS_n = a - ar^n$$
$$S_n(1-r) = a(1-r^n)$$
$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

Hvis $|r|<1$ er $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$, slik at

$$s = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{a}{1-r} \quad \blacksquare$$

Setning 12.1.4 Divergenstesten

Hvis rekka $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerer, så må $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Ellers divergerer rekka

Bevis: Anta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerer. Da er $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ en Cauchyfølge, dvs. det finnes en N s.a. $|S_n - S_m| \leq \varepsilon$, alle $n,m \geq N$.

Sett $m = n+1$. Da er $|S_n - S_{m+1}| = |a_{n+1}| \leq \varepsilon$.

Derfor må $a_n \to 0$. $\blacksquare$

Eksempel 1 Konvergerer rekka $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1000}\right)^n$?

Løsning: $\left(\frac{n}{n+1000}\right)^n = \left(\frac{1}{1+\frac{1000}{n}}\right)^n = \frac{1}{\left(1+\frac{1000}{n}\right)^n}$

$$\Big\downarrow \text{ siden } \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \to e^x$$

$$\frac{1}{e^{1000}} = e^{-1000} \neq 0$$

På grunn av divergenstesten, divergerer rekka.

Eksempel 2: Hva blir $\sum_{n=2}^{\infty} 3\left(-\frac{2}{3}\right)^n$?

Løsning: Ikke bli forvirret av at summen starter på $n=2$:

$$\sum_{n=2}^{\infty} 3\left(-\frac{2}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} 3\left(-\frac{2}{3}\right)^{n+2} = \frac{4}{9}\sum_{n=0}^{\infty} 3\left(-\frac{2}{3}\right)^n$$

$$a = 3 \quad r = -\frac{2}{3}$$

$$= \frac{4}{9}\cdot\frac{a}{1-r} = \frac{4}{9}\cdot\frac{3}{1-\left(-\frac{2}{3}\right)} = \frac{4}{9}\cdot\frac{3}{\frac{5}{3}} = \underline{\underline{\frac{12}{15}}}$$

Eksempel 3: Hva blir $x^2 + x^4 + x^6 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} x^{2n}$

Løsning: Dette er en geometrisk rekke med $r = x^2$, summen blir $\frac{x^2}{1-x^2}$ hvis $|r| = |x^2| < 1$, $(a = x^2)$ det vil si hvis $|x| < 1$.

Hvis $|x| \geq 1$ så divergerer rekka.

Vi vil senere se på Taylorrekker, og se at $x^2+x^4+x^6+\dots$ er Taylorrekka til $\frac{x^2}{1-x^2}$.

Eksempel 4: Konvergerer rekka $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$?

Løsning: Splitt opp summen slik:

linje 0	1	tom. a_{2^0}
	$\frac{1}{2}$	tom. a_{2^1}
	$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$	tom. a_{2^2}
linje n	$\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}$	tom. a_{2^3} (n=3 her)
	$+ \vdots$	

2^{n-1} ledd, alle $\geq \frac{1}{2^n}$,
Så summen av alt på linje n $\geq 2^{n-1}\cdot\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2}$

Total sum: $\geq \frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\dots$, slik at rekka divergerer.

Dette kalles den harmoniske rekka.

Merk: $a_n \to 0$ behøver altså ikke bety at rekka konvergerer!

Regneregler for rekker

Hvis $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ og $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergerer, så

1. $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ konvergerer også, og

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n+b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} c a_n$ konvergerer også (her er c et reelt tall),

og $\sum_{n=1}^{\infty} c a_n = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

12.2 Konvergenstester for rekker med positive ledd

1. Integraltesten
2. Sammenligningstesten og grensesammenligningstesten
3. Forholdstesten og rottesten.

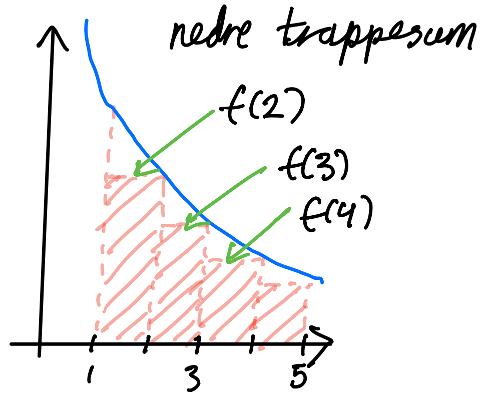
1. Integraltesten

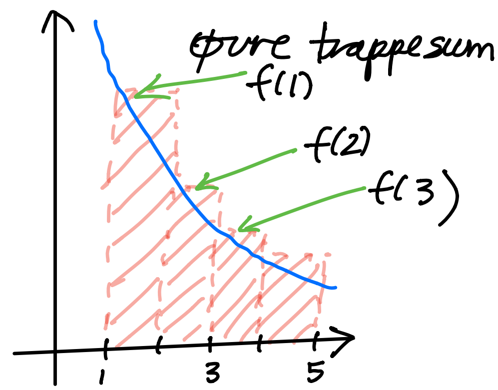
Anta: $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$, positiv, kont., avtagende.

Da gjelder at

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \text{ konvergerer} \Leftrightarrow \int_1^{\infty} f(x)dx \text{ konvergerer}$$

Bevis:





Vi sammenligner arealer (x går fra 1 til n

$$\sum_{k=2}^{n} f(k) \le \int_1^n f(x)\,dx \le \sum_{k=1}^{n-1} f(k)$$

Vi lar $n \to \infty$. Ser da at

$$\int_1^\infty f(x)\,dx \text{ konverger} \overset{\text{venstre ulikhet}}{\Rightarrow} \sum_{k=2}^\infty f(n) \text{ konvergerer}$$

$$\sum_{k=1}^\infty f(n) \text{ konvergerer} \overset{\text{høyre ulikhet}}{\Rightarrow} \int_1^\infty f(x)\,dx \text{ konvergerer.}$$

$\blacksquare$

Enklere bevis for divergens av den harmoniske rekka:
Sett $f(x) = \frac{1}{x}$ over:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx = \lim_{n\to\infty}\Big[\ln|x|\Big]_1^n = \lim_{n\to\infty} \ln n = \infty.$$

Integraltesten sier da at $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n}$ også divergerer.

Setning 12.2.4

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \text{ konvergerer } \Leftrightarrow p > 1$$

Bevis:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_1^{n} \frac{1}{x^p}\,dx$$

$$= \begin{cases} \lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{-p+1} x^{-p+1} \right]_1^n & p \neq 1 \\ \lim_{n\to\infty} \left[\ln|x| \right]_1^n & p = 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{-p+1} \left(n^{-p+1} - 1 \right) & p \neq 1 \\ \lim_{n\to\infty} \ln n & p = 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \infty & p < 1 \ (\Rightarrow -p+1 > 0) \\ \frac{1}{1-p} & p > 1 \ (\Rightarrow -p+1 < 0 \\ \infty & p = 1 \end{cases}$$

Så rekka konvergerer hvis og bare hvis $p > 1$ ∎

2. Sammenligningstesten Anta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ er positive rekker.

(i) Hvis $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerer, og $b_n \leq c a_n$ for alle n, og $c > 0$, da konvergerer også $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$

(ii) Hvis $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergerer, og $b_n \geq d a_n$ for alle n, og $d > 0$, da divergerer også $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Bevis (i): $\sum_{n=1}^{\infty} c a_n$ vil også konvergere hvis $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ gjør det, og

$$\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} b_n}_{\text{begrenset, voksende, derfor konvergent.}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} c a_n = \underbrace{M}_{\text{summen av hele rekka.}}$$

Eksempel 5: Avgjør om $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n^3+4}$ konvergerer.

Løsning: Vi ser at $n - 1 \leq n$

$n^3 + 4 \geq n^3$

Slik at $\frac{n-1}{n^3+4} \leq \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2}$.

Ser da at $a_n \leq \frac{1}{n^2}$. Siden $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{n^2}}_{b_n}$ er konvergent, så er også $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{n-1}{n^3+4}}_{a_n}$ konvergent (her er $c = 1$).

Grensesammenligningstesten

Anta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ og $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ er positive rekker

(i) Hvis $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerer og $\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} < \infty$,

så konvergerer $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ også.

(ii) Hvis $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergerer, og $\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} > 0$,

så divergerer $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ også.

Bevis: (i): Hvis $\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = M < \infty$, så vil

$$\frac{b_n}{a_n} \leq M+1 \text{ for alle } n \text{ store nok,}$$

slik at $b_n \leq \underbrace{(M+1)}_{C} a_n$

Resultatet følger nå fra sammenligningstesten. $\blacksquare$

Eksempel 5 igjen:

Vi sammenligner $b_n = \frac{n-1}{n^3+4}$ med $a_n = \frac{1}{n^2}$

$$\frac{b_n}{a_n} = \frac{\frac{n-1}{n^3+4}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{n^2(n-1)}{n^3+4} = \frac{1-\frac{1}{n}}{1+\frac{4}{n^3}} \to 1$$

Siden $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergerer, så konvergerer også $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n^3+4}$ på grunn av grensesammenligningstesten.