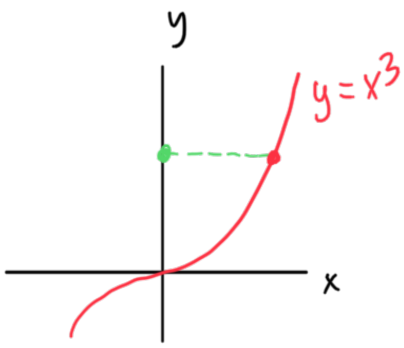
Omvendte og implisitte funksjoner

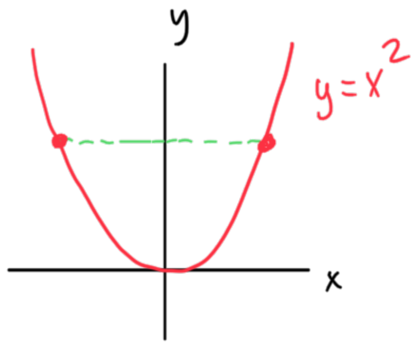
$\mathbb{F}: A \longrightarrow \mathbb{R}^m$ er injektiv (eller 1-1) dersom $\mathbb{F}(x) = \mathbb{F}(y)$ impliserer $x = y$.
(eller m.a.o. $\mathbb{F}(x) \neq \mathbb{F}(y)$ for $x \neq y$)

Eks



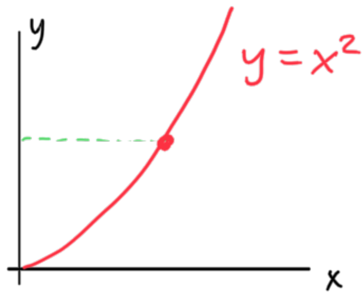
$f(x) = x^3$ injektiv på $A = \mathbb{R}$

Gitt $y \in \mathbb{R}$ $\rightsquigarrow$ kun én $x \in \mathbb{R}$ som tilfredsstiller $x^3 = y$
$(x = \sqrt[3]{y})$



$f(x) = x^2$ ikke injektiv på $A = \mathbb{R}$.

F.eks. $y = 1$ gir to løsninger av $x^2 = y$
$x = 1$ og $x = -1$

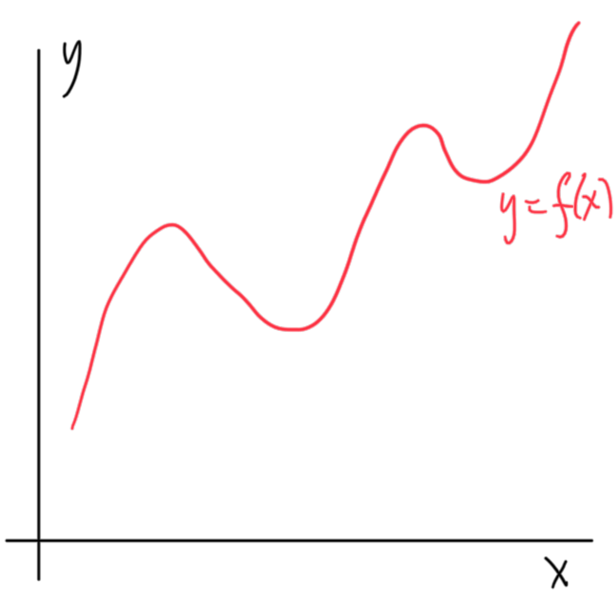


$f(x) = x^2$ injektiv på $A = [0, \infty)$

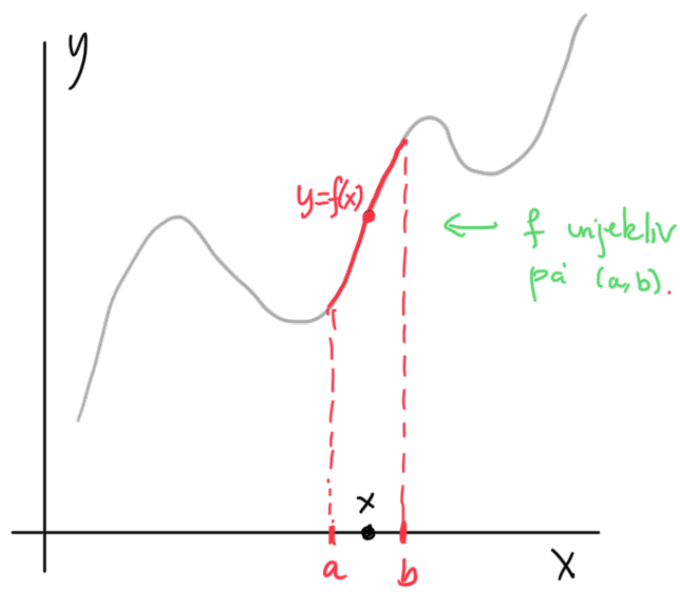
Gitt $y \geq 0$ finnes kun én $x \geq 0$ med $x^2 = y$.

Observasjon for én variabel:

Dersom (a,b) er et intervall s.a $f'(x) \neq 0$ for alle $x \in (a,b)$, er f enten monotont økende $(f'(x) > 0)$ eller motont minkende $(f'(x) < 0)$ $\rightsquigarrow$ derfor er f injektiv på (a,b):



$f(x)$ er ikke injektiv her.



Men for punkter x s.a $f'(x) \neq 0$ finnes det et intervall (a,b) s.a f er injektiv der.

$\therefore$ Dersom x er slik at $f'(x) \neq 0$ er f injektiv på en omegn om x.

Dersom $f: D \to \mathbb{R}$ er injektiv finnes det en invers funksjon

$g: V \to D$ s.a $g(f(x)) = x$ og $f(g(y)) = y$.

D = definisjonsmengde
V = verdimengde

Dersom f er deriverbar, er g også det og for $y = f(x)$

$$\boxed{g'(y) = \frac{1}{f'(x)}}$$

nyttig for å studere løsningene til likningen $f(x) = C$.

Generalisering til flere variable

$\mathbb{F}: D \longrightarrow V$ $\quad D \subseteq \mathbb{R}^m$ definisjonsmengde
$V \subseteq \mathbb{R}^m$ verdimengde

Dersom $\mathbb{F}$ er injektiv, lar vi $\mathbb{G}: V \longrightarrow D$ være den omvendte funksjonen, definert ved

$$\mathbb{G}(y) = x \quad \text{dersom} \quad \mathbb{F}(x) = y$$

Skriver også $\mathbb{G} = \mathbb{F}^{-1}$!

Notasjon $\mathbb{F}: A \to \mathbb{R}^m$ er en funksjon
$U \subseteq A$ delmengde

$\rightsquigarrow$ skriver $\mathbb{F}|_U$ for restriksjonen av $\mathbb{F}$ til U.

$\mathbb{F}|_U$ er definert ved

$$(\mathbb{F}|_U)(x) = \mathbb{F}(x) \quad \text{for } x \in U.$$

Omvendt funksjonsteorem

$U \subseteq \mathbb{R}^m$ en åpen mengde

$\mathbb{F}: U \to \mathbb{R}$ kontinuerlig deriverbar

$\bar{x} \in U$ et punkt slik at $\mathbb{F}'(x)$ er inverterbar

Da finnes det en omegn $U_0 \subseteq U$ om $\bar{x}$ slik at restriksjonen

$$F|_{U_0} : U_0 \longrightarrow V_0$$

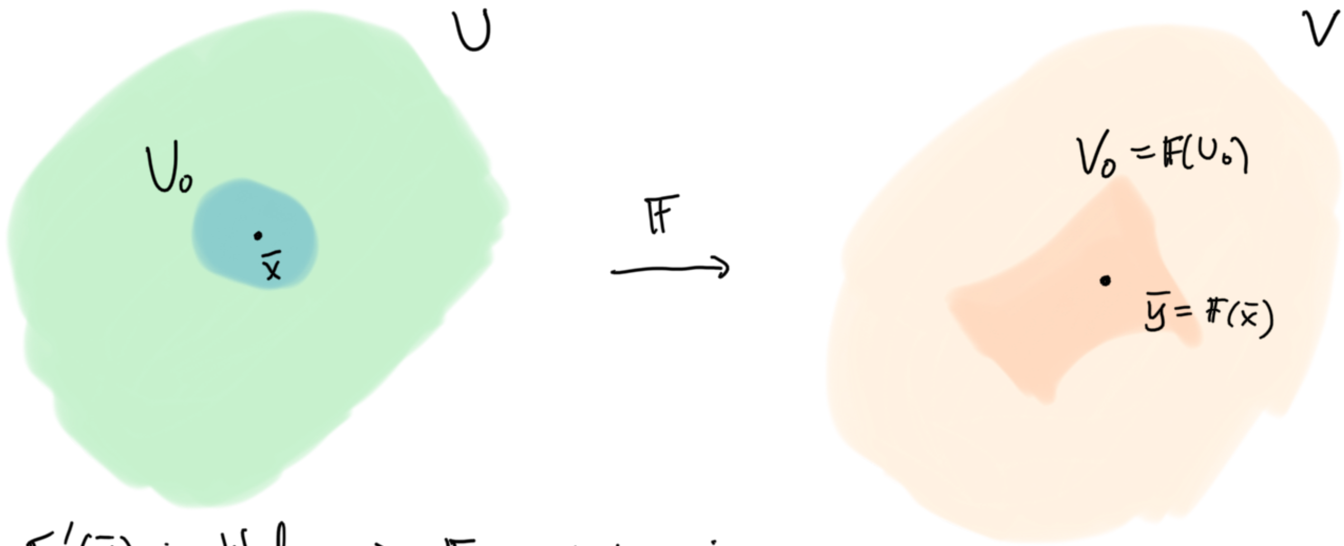
er injektiv.

Verdimengden V_0 er en omegn av $\bar{y} = f(\bar{x})$, og den omvendte funksjonen $\mathbb{G} : V_0 \longrightarrow U_0$ er deriverbar med Jacobimatrise

$$G'(\bar{y}) = F'(\bar{x})^{-1}$$

gir mening da $\mathbb{F}'(\bar{x})$ er inverterbar.

Forklaring



$\mathbb{F}'(\bar{x})$ invertibel $\Rightarrow$ $\mathbb{F}$ er 1-1 på en omegn U_0 om $\bar{x}$.

NB! Teoremet sier ikke at $\mathbb{F}$ er injektiv dersom $\mathbb{F}'(x)$ er inverterbar på hele U!

Eks La

$$\mathbb{F}(x,y) = (x^2+y^2,\ xy)$$

Regner ut $\mathbb{F}'(x,y)$:

$$\mathbb{F}'(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ y & x \end{pmatrix}$$

$\mathbb{F}'(x,y)$ invertibel $\iff$ $\det \mathbb{F}'(x,y) \neq 0$

$$\iff \quad 2x^2 - 2y^2 \neq 0$$

$$\iff \quad x \neq y \quad \text{og} \quad x \neq -y$$

$\therefore$ For alle punkter (a,b) der $a \neq \pm b$ fines det en omegn $U_0 \subseteq \mathbb{R}^2$ s.a $\mathbb{F}|_{U_0}$ er injektiv.

Merk at
$$\mathbb{F}(0,1) = (0^2+1^2,\ 0\cdot 1) = (1,0)$$
$$\mathbb{F}(0,-1) = (0+(-1)^2,\ 0\cdot(-1)) = (1,0)$$

Så $\mathbb{F}(0,1) = \mathbb{F}(0,-1)$ og $\mathbb{F}$ er ikke injektiv.

Hva kan vi si om inversen $\mathbb{G}$ i $(x_0,x_1) = (0,1)$?

Den er litt komplisert:
$$\mathbb{G}(u,v) = \left(\frac{\sqrt{u+2v} + \sqrt{u-2v}}{2},\ \frac{\sqrt{u+2v} - \sqrt{u+2v}}{2} \right)$$

Men det er lett å regne ut $\mathbb{G}'(y)$:

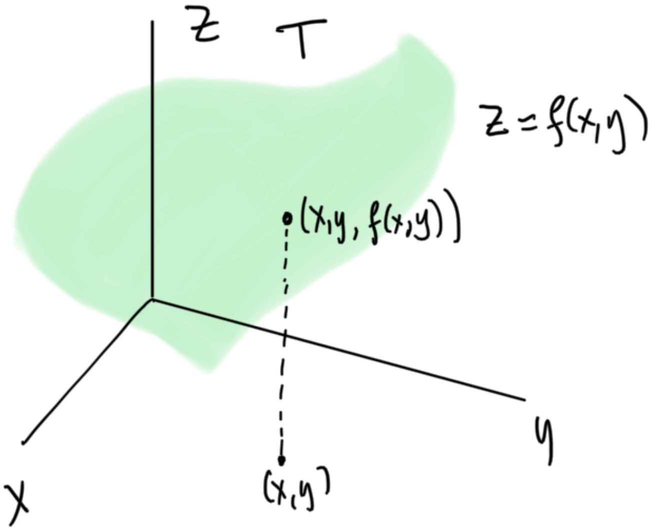
$y = \mathbb{F}(0,1) = (1,0)$

$$\rightsquigarrow \mathbb{G}'(u,v) = \mathbb{F}'(x,y)^{-1} = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ y & x \end{pmatrix}^{-1}$$

$$\rightsquigarrow \mathbb{G}'(1,0) = \mathbb{F}'(0,1)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

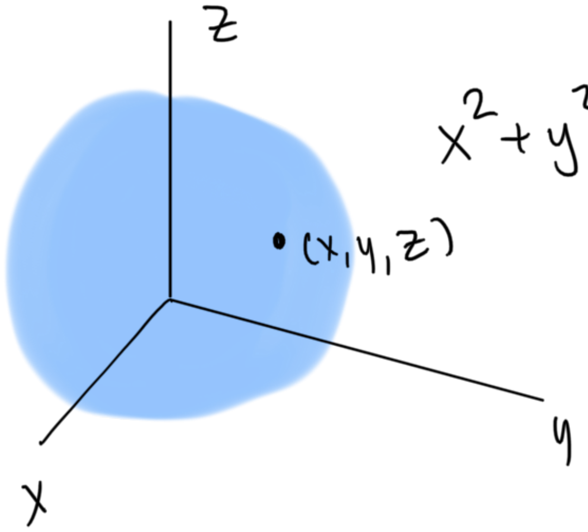
Implisitt funksjonsteorem

Har sett flater på formen $z = f(x,y)$:



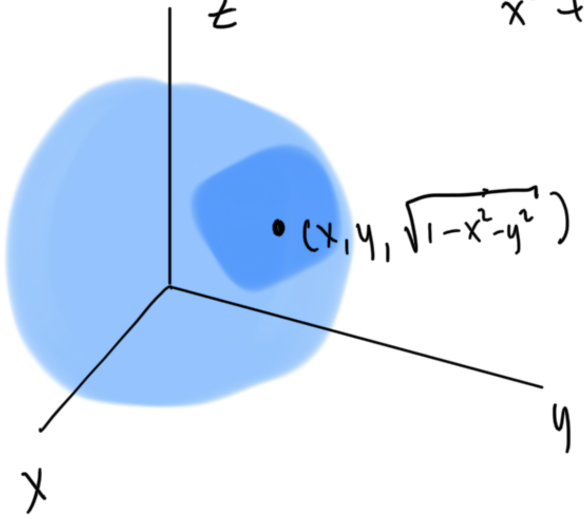
← flaten er grafen til funksjonen $f(x,y)$

Men det finnes flater som ikke er på denne formen:



$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$ ← en "implisitt likning"

Likevel kan denne beskrives som $z = f(x,y)$ "i en omegn":



$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \Rightarrow z = \pm\sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

$$\rightsquigarrow \quad z = f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

beskriver den 'øvre halvkula' som en graf $z = f(x,y)$.

Vi skal vise at dette kan gjøres helt generelt (det Implisitte funksjons teoremet).

Dette er nyttig: flatene $z = f(x,y)$ er enklere enn generelle flater gitt ved $f(x,y,z)=0$.

(Eksempel: Om T er gitt ved $z=f(x,y)$ for $a \le x \le b$, $c \le y \le d$

$$\iint_T F(x,y,z)\, dS = \int_a^b \int_c^d F(x,y,f(x)) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\, dx\,dy$$)

<u>Implisitt funksjonsteorem</u>

$U \subseteq \mathbb{R}^{m+1}$ åpen

$f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ kontinuerlig deriverbar

$(\bar{x}, \bar{y}) = (\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_m, \bar{y}) \in U$ et punkt s.a $f(\bar{x},\bar{y}) = 0$.

Anta videre at $\frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x},\bar{y}) \neq 0$.

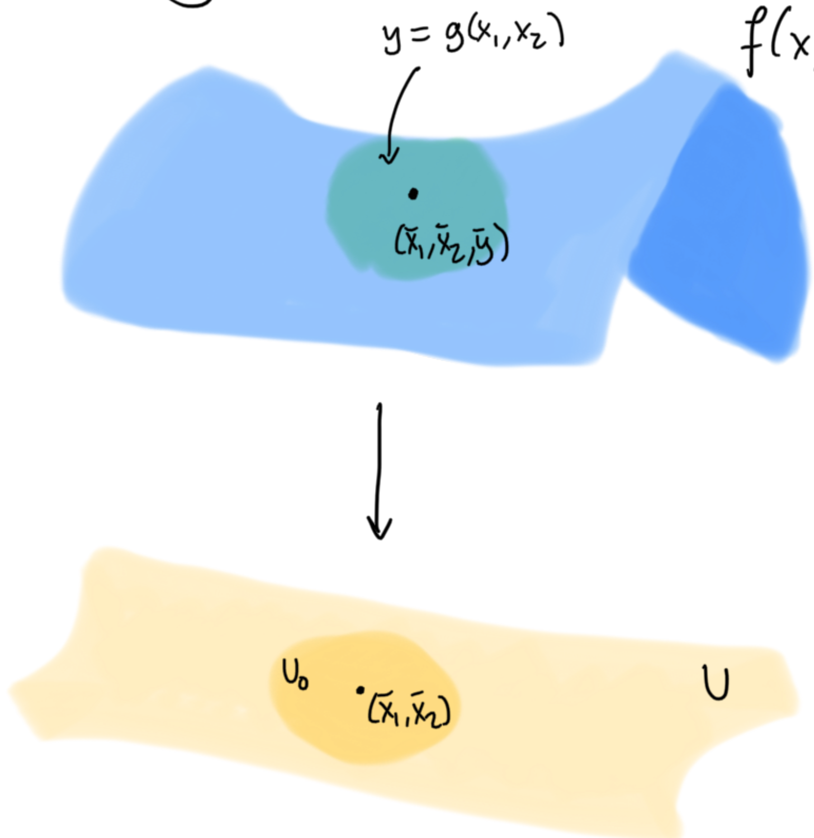
Da finnes en $U_0 \subseteq U$ som inneholder $\bar{x}$ slik at for hver $x \in U_0$ finnes et entydig tall $g(x)$ s.a

$$f(x, g(x)) = 0. \qquad (\text{"} y = g(x) \text{"})$$

Funksjonen $g : U_0 \longrightarrow \mathbb{R}$ er deriverbar, og

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}(x) = - \frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(x, g(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x))} \qquad \text{for alle } x \in U_0.$$

Forklaring



$f(x_1, x_2, y) = 0$ $\quad T \subseteq \mathbb{R}^3$

Over U_0 er flaten gitt ved $y = g(x_1, x_2)$.

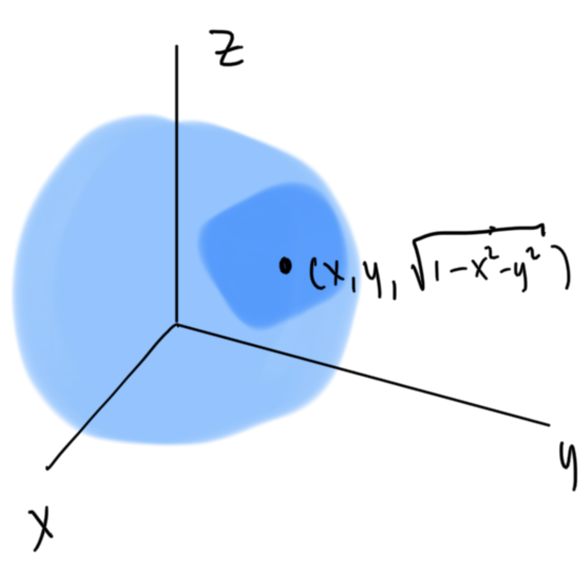
$U \subseteq \mathbb{R}^2$

Alle flater $f(x, y, z) = 0$ ser ut som grafer $z = f(x, y)$ "lokalt".

Eks $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$

Vi så at vi kunne velge

$$g(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}.$$



Kan bruke Implisitt funksjonsteorem til å regne ut $\frac{\partial g}{\partial x}$ og $\frac{\partial g}{\partial y}$:

$$x^2+y^2+z^2=1$$

$\rightsquigarrow$ deriver mhp x: $\quad 2x + 2z\dfrac{\partial z}{\partial x} = 0$ $\swarrow$ $z = g(x,y)$

$$\longrightarrow \quad \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{z} \qquad\qquad z = g(x,y)$$

$$\rightsquigarrow \quad \frac{\partial g(x,y)}{\partial x} = -\frac{x}{g(x,y)} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

(Dette stemmer med vanlig derivasjon av $\sqrt{1-x^2-y^2}$)

Eks (Implisitt derivasjon)

En funksjon $z(x,y)$ tilfredsstiller likningen

$$x + y^2 + z^3 = 3xyz$$

Finn $\dfrac{\partial z}{\partial x}$.

Løsning: Deriverer mhp x:

$$1 + 3z^2\frac{\partial z}{\partial x} = 3yz + 3xy\frac{\partial z}{\partial x}$$

$$\rightsquigarrow \quad (3z^2 - 3xy)\frac{\partial z}{\partial x} = 3yz - 1$$

$$\rightsquigarrow \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{3yz-1}{3z^2-3xy}$$