Iterasjon av funksjoner

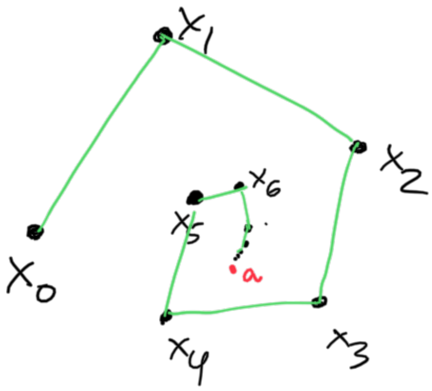
$\mathbb{F}: \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ funksjon i m variabler.

$\mathbb{x}_0 \in \mathbb{R}^m$ startpunkt.

$\rightsquigarrow$ følge i $\mathbb{R}^m$

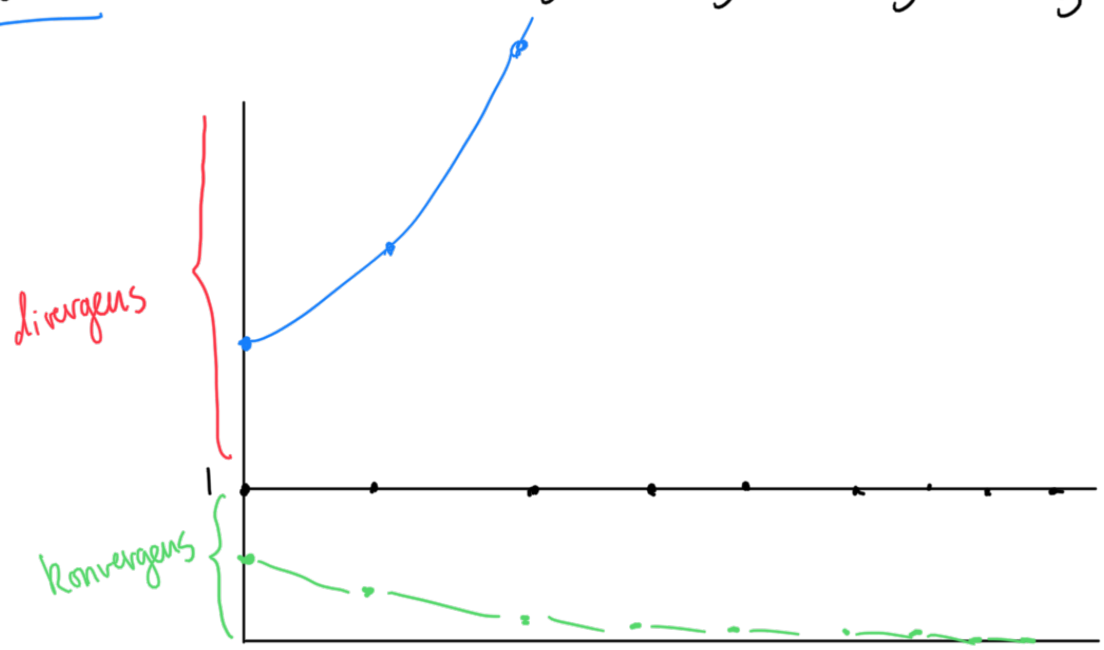
$$\mathbb{x}_1 = \mathbb{F}(\mathbb{x}_0)$$
$$\mathbb{x}_2 = \mathbb{F}(\mathbb{x}_1)$$
$$\mathbb{x}_3 = \mathbb{F}(\mathbb{x}_2)$$
$$\vdots$$
$$\mathbb{x}_{n+1} = \mathbb{F}(\mathbb{x}_n)$$

$\Leftarrow$ Denne følgen fremkommer ved å iterere $\mathbb{F}$



Eks $f(x) = x^2 \rightsquigarrow x_{n+1} = x_n^2$

Startpunkt	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5		
$x_0 = 1$	1	1	1	1	1	..	konvergerer
$x_0 = \frac{1}{2}$	2^{-2}	2^{-4}	2^{-8}	2^{-16}	2^{-32}	..	konvergerer
$x_0 = 3$	3^2	3^4	3^8	3^{16}	3^{32}	..	divergerer



Eks $n=1$: $f(x)=\sqrt{1+x}$ $x_0=1$ 1

$$\rightsquigarrow x_1 = f(1) = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \approx 1.4142\ldots$$

$$x_2 = f(\sqrt{2}) = \sqrt{1+\sqrt{2}} \approx 1.5538\ldots$$

$$x_3 = \sqrt{1+f(x_2)} = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{2}}} \approx 1.5981\ldots$$

$$x_4 = \sqrt{1+f(x_3)} = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{2}}}} \approx 1.6118\ldots$$

$\vdots$

Anta først at denne følgen konvergerer. Hva er grensen?

La $a = \lim_{n\to\infty} x_n$.

Vi har $x_{n+1} = \sqrt{1+x_n}$

f er kontinuerlig

$$\rightsquigarrow a = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{1+x_n} = \sqrt{1+a}$$

Altså tilfredsstiller a likningen $a = \sqrt{1+a}$

$$\rightsquigarrow a^2 = 1+a \rightsquigarrow a = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ eller } \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

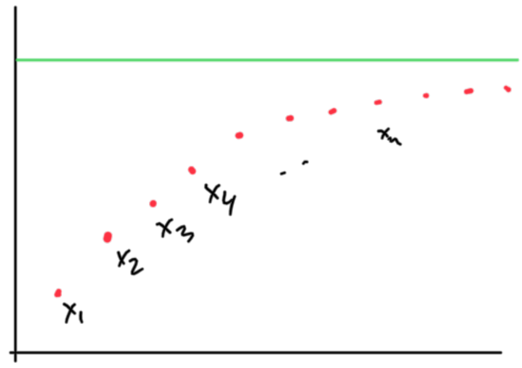
$$\rightsquigarrow a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$ (den andre er <0)

det gyldne snitt!

Dermed får vi at

$$\therefore \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad (!)$$

Viser at følgen konvergerer:



En voksende + begrenset følge må konvergere

Bruker at følgen konvergerer dersom

(1) Følgen er begrenset; og

(2) Følgen er voksende

La $\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. (Vil vise at grensen er ϕ.)

(1): Viser at $x_n < \phi$ for alle n.

Induksjon på n:

$n=0$: $x_0 = 1 < \phi \Rightarrow$ OK ✓

induksjons hypotesen

$n>0$: Har $x_{n+1} = \sqrt{1+x_n} \Rightarrow x_{n+1} < \sqrt{1+\phi}$

Men $\sqrt{1+\phi} \overset{!}{=} \phi \Rightarrow x_{n+1} < \phi$ ✓ $\qquad 1+\phi = \phi^2$

(2): Viser at $x_n < x_{n+1}$ for alle n.

Induksjon på n.

$n=0$: $x_0 = 1 \quad x_1 = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \Rightarrow$ OK ✓

$n>1$: Antar at $x_n > x_{n-1}$.

$\rightsquigarrow 1 + x_n > 1 + x_{n-1}$

$\rightsquigarrow \sqrt{1+x_n} > \sqrt{1+x_{n-1}}$

$\rightsquigarrow x_{n+1} > x_n \rightsquigarrow$ OK ✓

Det er ofte litt jobb å vise at slike følger faktisk konvergerer, særlig med mer kompliserte funksjoner $f(x)$.

$\rightsquigarrow$ trenger generelle teoremer som garanterer konvergens.

Eks (5.4.1 i FVLA)

$a, b, c, d > 0$

$(x_{n+1}, y_{n+1}) = \mathbb{F}(x_n, y_n)$ der $\mathbb{F}(x,y) = \begin{pmatrix} ax - bxy \\ cy + dxy \end{pmatrix}$

x_n = antall byttedyr i år n
y_n = antall rovdyr i år n

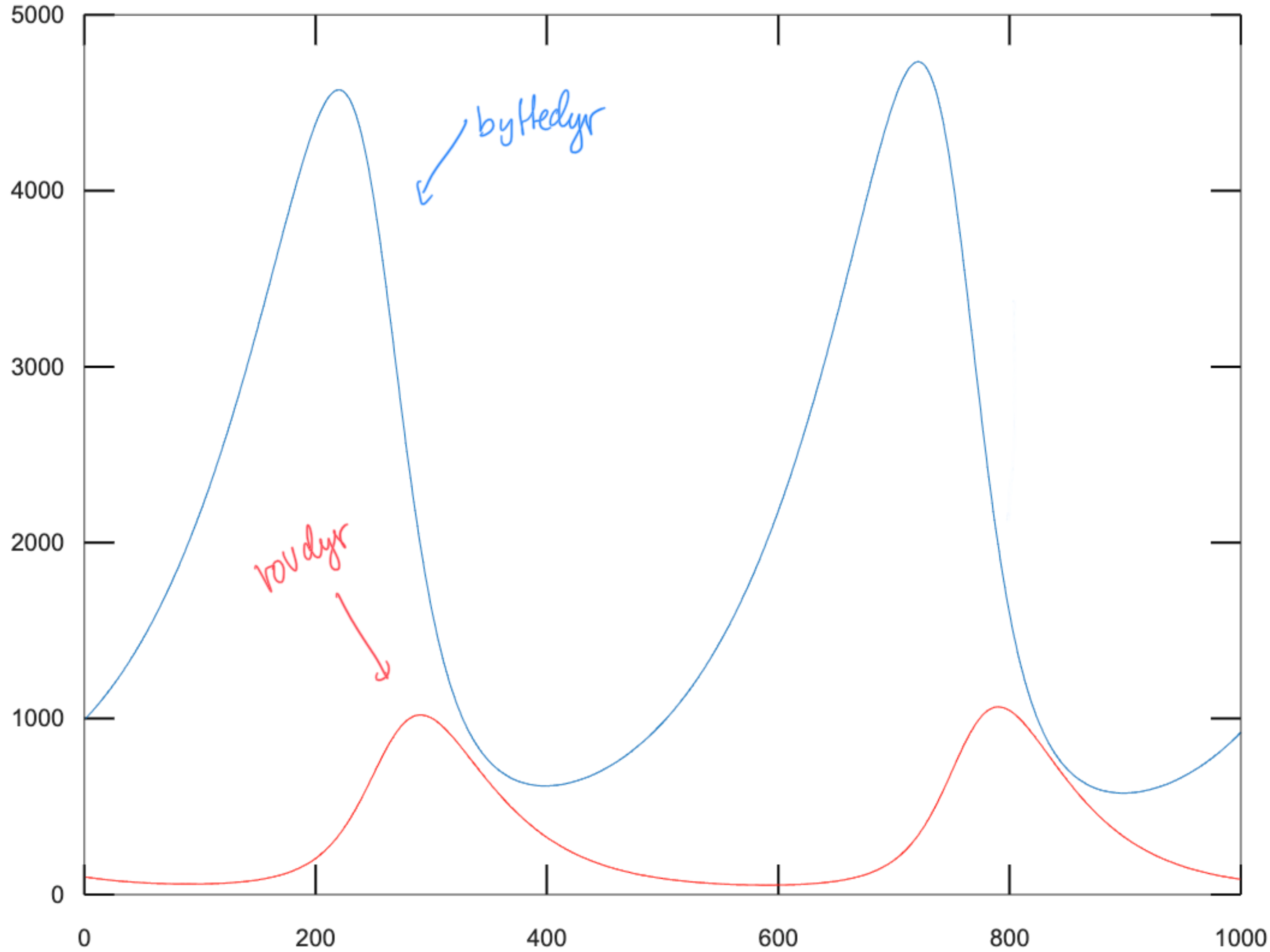
$x_n y_n$ ⟷ møter mellom rovdyr og byttedyr

bidrar til vekst i rovdyr og reduksjon i byttedyr.

En simulering med
$a = 1.01$
$b = 3 \cdot 10^{-5}$
$c = 0.98$
$d = 10^{-5}$

byttedyr.m:

```
function [x,y]=byttedyr(m,k,N)
x=zeros(1,N);
y=zeros(1,N);
x(1)=m;
y(1)=k;
for n=1:N-1
   x(n+1)=1.01*x(n)-3*10^(-5)*x(n)*y(n);
   y(n+1)=0.98*y(n)+10^(-5)*x(n)*y(n);
end
```



Få rovdyr $\rightsquigarrow$ byttedyrbestanden vokser $\rightsquigarrow$ rovdyrbestanden vokser $\rightsquigarrow$ blir veldig mange rovdyr $\rightsquigarrow$ byttedyrbestanden går ned $\rightsquigarrow$ rovdyrbestanden går også ned.