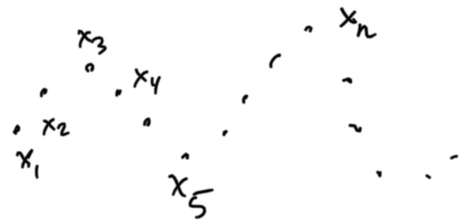
Komplettheit av $\mathbb{R}^m$



$\{x_n\}$ en følge i $\mathbb{R}^m$:

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, \ldots$$

$\leadsto$ Har mange delfølger

$$y_k = x_{n_k} \qquad \text{der} \quad n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$$

F. eks:

- $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, \ldots$ $\qquad y_k = x_{2k}$
- $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, \ldots$ $\qquad y_k = x_{f_k}$

  $f_k =$ k-te Fibonacci

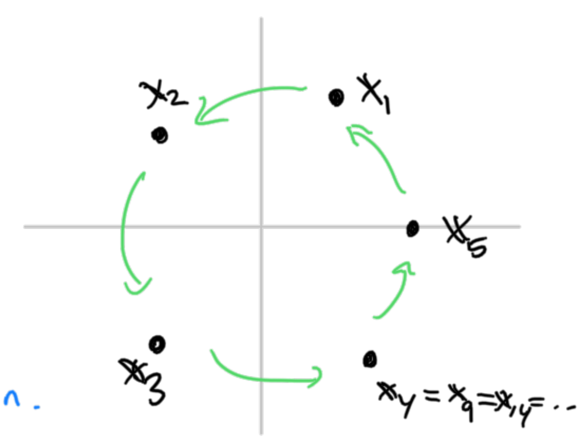
Eks $\quad x_n = (-1)^n = -1, 1, -1, 1, -1, 1, \ldots$

x_n konvergerer ikke, men $y_n = x_{2n}$ gjør det.

Eks $\quad x_n = \left(\cos\left(\frac{2\pi n}{5}\right), \sin\left(\frac{2\pi n}{5}\right)\right)$

$\leadsto y_n = x_{5n} = (1,0)$ for alle n.

$\therefore$ x_n konvergerer ikke, men den har en konvergent delfølge y_n.



Setning Anta $\{x_n\}$ konvergerer mot $x \in \mathbb{R}^m$.
Da konvergerer også alle delfølger mot x.

Gitt $\varepsilon > 0$ $\rightsquigarrow$ finner $N \geq 0$ slik at $|x_n - x| < \varepsilon$ for $n \geq N$.

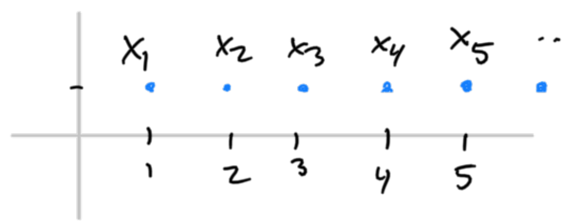
La $y_k = x_{n_k}$.
Det finnes en $K \geq 0$ s.a $n_k \geq N$ for alle $k \geq K$.

$\rightsquigarrow$ for alle $k \geq K$ har vi $|y_k - x| = |x_{n_k} - x| < \varepsilon$

$\rightsquigarrow$ y_{n_k} konvergerer mot x. $\square$

Når finner vi en konvergent delfølge?

Ikke alltid: $x_n = (n, 1)$.



Bolzano - Weierstrass' teorem
Alle begrensede følger i $\mathbb{R}^m$ har en konvergent delfølge.

Selv om vi antar at følgen er begrenset er ikke dette utsagnet så opplagt - det bruker vesentlige egenskaper om de reelle tallene.

Ta f.eks utsagnet
"Alle begrensede følger i $\mathbb{Q}^m$ har en konvergent delfølge"

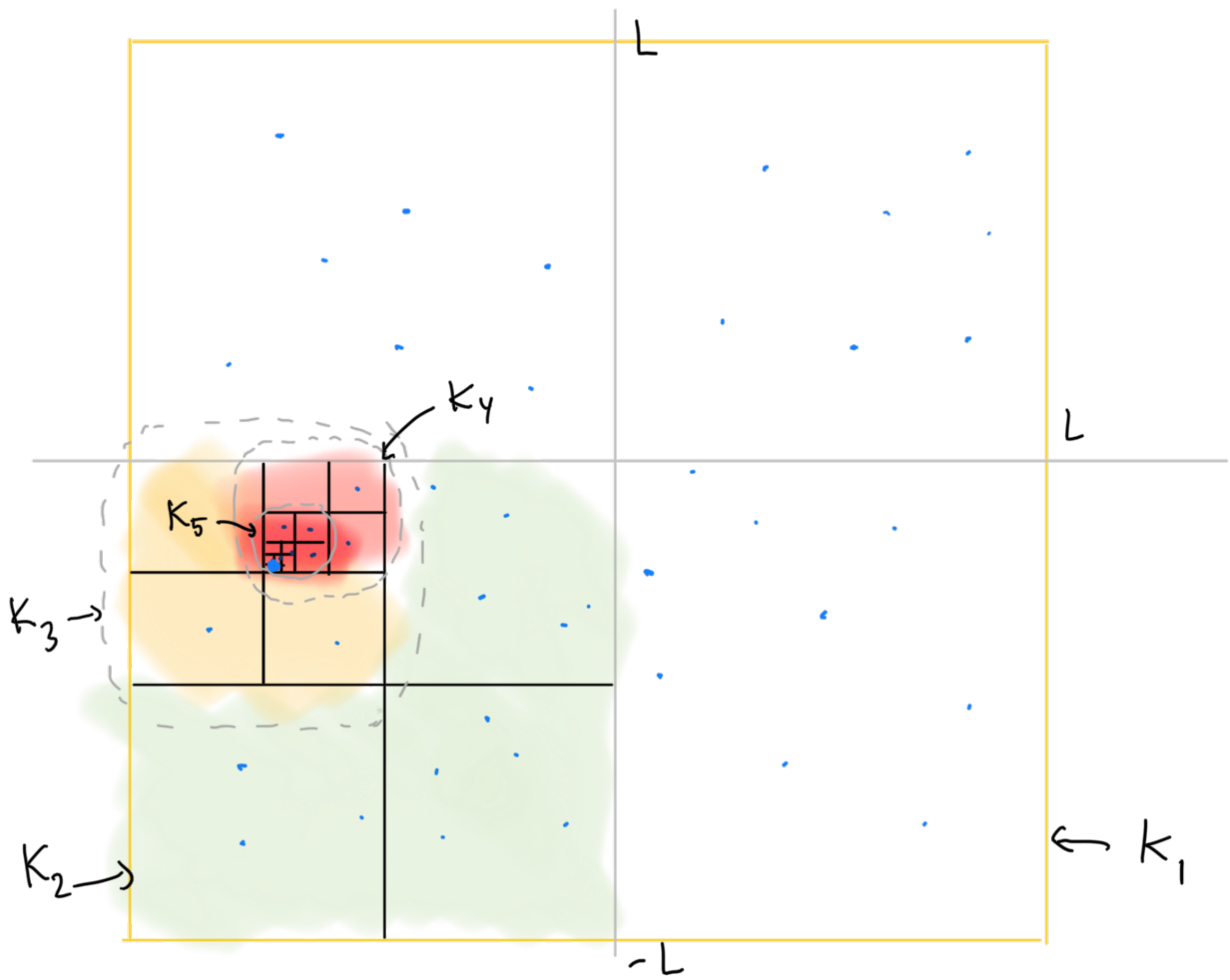
Dette er galt, selv for $m=1$:
$x_1 = 3$
$x_2 = 3.1$
$x_3 = 3.14$
$x_4 = 3.141$
$x_5 = 3.1415$
$\vdots$

$\rightsquigarrow$ ingen konvergent delfølge: Om en delfølge konvergerte, ville den konvergert mot π. Men $\pi \notin \mathbb{Q}$!

Snedig bevis:
(viser tilfellet $n=2$ – argumentet for $n>2$ er nesten helt likt)

$\{x_n\}$ begrenset $\rightsquigarrow$ finner en $L>0$ s.a $|x_n| \leq L$ for alle n.

$\rightsquigarrow$ hele følgen ligger i kvadratet $\underbrace{[-L, L]\times[-L, L]}_{= K_1}$.



Minst én kvadrant i K_1 inneholder uendelig mange x_n'er.

$\rightsquigarrow$ La K_2 være en av disse.

Minst én kvadrant i K_2 inneholder uendelig mange x_n'er.

$\rightsquigarrow$ La K_3 være en av disse

etc.

Får en følge kvadrater $K_1 \supset K_2 \supset K_3 \supset \dots$

Kan for hver $k>0$ velge en $x_{n_k} \in K_k$.

Delfølgen $y_k = x_{n_k}$ må konvergere mot et punkt $x \in K_1$ fordi diameteren på K_k går mot 0:

$$\text{diameter}(K_k) = \frac{\sqrt{2}\,L}{2^k}.$$

$\square$

Cauchy-følger

Defn En følge $\{x_n\}$ i $\mathbb{R}^m$ er en Cauchy-følge dersom:

For enhver $\varepsilon > 0$, finnes en $N>0$ s.a $|x_n - x_k| < \varepsilon$ for alle $n, k \geq N$. $(*)$

↑ ligner på definisjonen av konvergens, men her nevnes ikke noe om grenser.

Lemma Enhver konvergent følge i $\mathbb{R}^m$ er en Cauchy-følge.

Bevis Anta $x_n \to a$.

Gitt $\varepsilon > 0$. $\rightsquigarrow$ Kan finne $N>0$ s.a
$|x_n - a| < \varepsilon/2$ for alle $n \geq N$.

Ved trekantulikheten:

$$|x_n - x_k| = |(x_n - a) + (a - x_k)|$$
$$\leq |x_n - a| + |x_k - a|$$
$$< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \quad \text{for } n, k \geq N.$$

$\leadsto \{x_n\}$ er en Cauchy-følge. $\square$

<u>Teorem</u> (Kompletthet av $\mathbb{R}^m$)

dette er definisjonen av "kompletthet".

Alle Cauchy-følger i $\mathbb{R}^m$ konvergerer.

$\therefore$ En følge konvergerer hvis og bare hvis det er en Cauchy-følge.

<u>Bevis</u> Tre steg:

(i) Vis at enhver Cauchy-følge er begrenset.

(ii) Bruk Bolzano-Weierstrass til å velge ut en konvergent delfølge $y_k = x_{n_k}$. $\quad y = \lim_{n \to \infty} y_n$.

(iii) Vis at $\{x_n\}$ konvergerer mot y.

(i): $\{x_n\}$ Cauchy $\leadsto$ finnes en $N > 0$ s.a

$|x_n - x_k| < 1$ for alle $n, k \geq N$

(ta $\varepsilon = 1$)

Trekantulikheten:

$$\leadsto |x_n| = |(x_n - x_N) + x_N| \leq |x_n - x_N| + |x_N| \quad \text{for } n \geq N$$

uavhengig av n

$$\leq 1 + |x_N|$$

$\therefore$ For alle n har vi

$$|x_n| \leq \max\{|x_1|+1, |x_2|+1, \ldots, |x_N|+1\}$$

$\rightsquigarrow \{x_n\}$ er begrenset. ✓

(ii) OK, da $\{x_n\}$ er begrenset $\rightsquigarrow$ $y_k = x_{n_k}$ konvergent delfølge. ✓

(iii) La $\varepsilon > 0$. Skal vise at vi kan få til

$$|x_n - y| < \varepsilon \qquad \text{der } y = \lim_{n \to \infty} y_n$$

for store n.

$\{x_n\}$ Cauchy-følge $\Rightarrow$ Finner $N \geq 0$ s.a $|x_n - x_k| < \varepsilon/2$ for alle $n, k \geq N$.

$\{y_n\}$ konvergerer mot y $\Rightarrow$ finner $K \geq 0$ s.a $|y_k - y| < \varepsilon/2$ for alle $k \geq K$.

$$\begin{aligned}
\Rightarrow |x_n - y| &= |x_n - y_k + y_k - y| \\
&\leq |x_n - y_k| + |y_k - y| \qquad \text{trekantulikheten} \\
&= |x_n - x_{n_k}| + |y_k - y| \\
&< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \qquad \text{for alle } n \geq N.
\end{aligned}$$

Derfor konvergerer $\{x_n\}$ mot y. ✓ $\square$