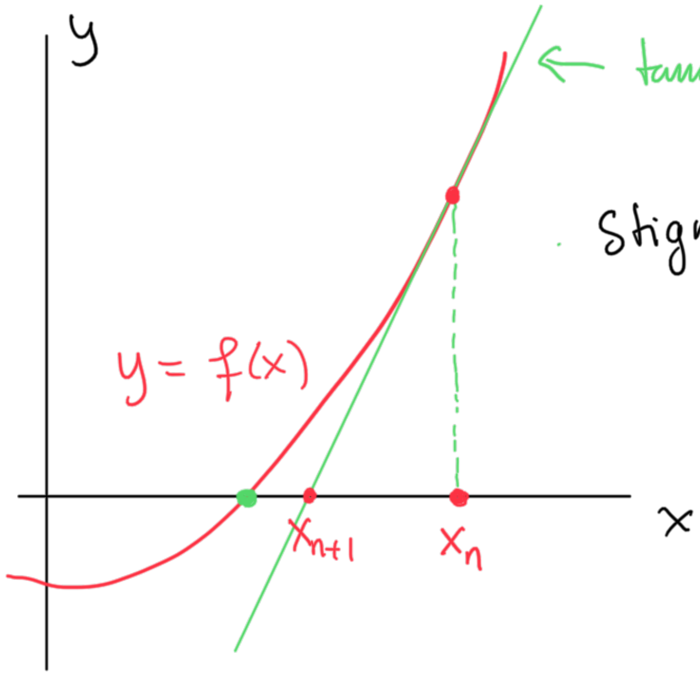
Newtons metode i flere variable

Mål: Finne løsninger til $\mathbb{F}(x) = 0$ ved hjelp av konvergente følger (iterasjon).

Recap: Én variabel



Stigningstall: $f'(x_n) \approx \dfrac{f(x_n) - f(x_{n+1})}{x_n - x_{n+1}}$

$$\approx \frac{f(x_n)}{x_n - x_{n+1}}$$

$$\boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}$$

Dersom $\{x_n\}$ konvergerer, er grensen en løsning av likningen $f(x) = 0$.

I flere variable:

$\mathbb{F} : A \longrightarrow \mathbb{R}^m$ funksjon i m variable

$\rightsquigarrow$ skal finne $x \in \mathbb{R}^m$ s.a. $\mathbb{F}(x) = 0$.

Newtons metode:

trenger at $\mathbb{F}'(x_n)$ er invertibel for hver n..

$$x_{n+1} = x_n - \left[\mathbb{F}'(x_n)\right]^{-1} \cdot \mathbb{F}(x_n)$$

Dette gir en følge $x_1, x_2, x_3, \ldots$ i $\mathbb{R}^m$ som (forhåpentligvis) konvergerer mot et nullpunkt.

Følgen kan tolkes som en <u>iterasjon</u> av funksjonen

$$G(x) = x - F'(x)^{-1} F(x)$$

(fordi $x_{n+1} = G(x_n)$ for $n = 1, 2, \ldots$)

- Newtons metode er lett å implementere på en datamaskin [f.eks python/MATLAB]
- Pleier å konvergere ganske raskt
- Men: Litt vanskelig å avgjøre når vi har konvergens!

Faktum: Følgen x_n konvergerer alltid så lenge vi velger et startpunkt som er tilstrekkelig nær løsningen x.

Men når vet vi at vi er nær nok?

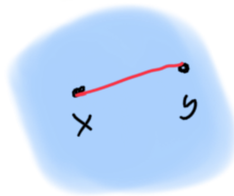
<u>Notasjon</u> Hvis A er en $n \times n$ matrise, så definerer vi operatornormen til A ved

$$|A| = \sup \left\{ \frac{|Ax|}{|x|} : \begin{array}{l} x \in \mathbb{R}^n \\ x \neq 0 \end{array} \right\}$$

Dersom $A = (a_{ij})_{i,j}$ har vi $|A| \leq \sqrt{n} \sqrt{\sum_{i,j} a_{ij}^2}$

Kantorovitsj' teorem (ikke pensum til eksamen)

$U \subseteq \mathbb{R}^m$ åpen, konveks mengde.



$\mathbb{F}: U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ deriverbar.

$\mathbb{x}_{n+1} = \mathbb{x}_n - \mathbb{F}'(\mathbb{x}_n)^{-1} \cdot \mathbb{F}(\mathbb{x}_n)$ for et startpunkt $x_0 \in U$.

Anta:

- Det finnes en M s.a

  $$|\mathbb{F}'(x) - \mathbb{F}'(y)| \leq M|x-y| \quad \text{for alle } x, y \in U$$

- $\mathbb{F}'(x_0)$ invertibel, med $|\mathbb{F}'(x_0)^{-1}| \leq K$.

- Vi har $\overline{B}(x_0, \frac{1}{KM}) \subseteq U$ og

  $$|x_1 - x_0| = |\mathbb{F}'(x_0)^{-1}\mathbb{F}(x_0)| \leq \frac{1}{2KM}.$$

Da gjelder:

- $F'(x)$ er invertibel for alle $x \in B(x_0, \frac{1}{KM})$

- $x_n \in B(x_0, \frac{1}{KM})$ for alle n, og det finnes en $x \in B(x_0, \frac{1}{KM})$ s. a.

  $$\lim_{n \to \infty} \mathbb{x}_n = x \qquad \text{og} \qquad \mathbb{F}(x) = 0.$$

punktet $\mathbb{x}$ er det eneste nullpunktet til $\mathbb{F}$ i $\overline{B}(x_0, \frac{1}{KM})$

- Nyttig estimat:

Dersom $|x_1 - x_0| \leq \varepsilon \leq \frac{1}{2KM}$, så er

$$|x - x_n| \leq \frac{1}{KM}\left[\frac{\left(1-\sqrt{1-2h}\right)^{2^n}}{2^n}\right]$$

der $h = KM\varepsilon \leq \frac{1}{2}$.

Eks $\mathbb{F}(x,y) = \left(x^2+y^2-10,\ xy-2\right)$

ser på løsningene av systemet
$$x^2+y^2=10$$
$$xy = 2$$

Regner ut $\mathbb{F}'(x,y)$:

$$\mathbb{F}'(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ y & x \end{pmatrix} \rightsquigarrow \mathbb{F}'(x,y)^{-1} = \frac{1}{2x^2-2y^2}\begin{pmatrix} x & -2y \\ -y & 2x \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{F}'(x,y)^{-1}\cdot \mathbb{F}(x,y) = \frac{1}{2x^2-2y^2}\begin{pmatrix} x & -2y \\ -y & 2x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^2+y^2-10 \\ xy-2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2x^2-2y^2}\begin{pmatrix} x^3 - xy^2 - 10x + 4y \\ x^2y - 4x - y^3 + 10y \end{pmatrix}$$

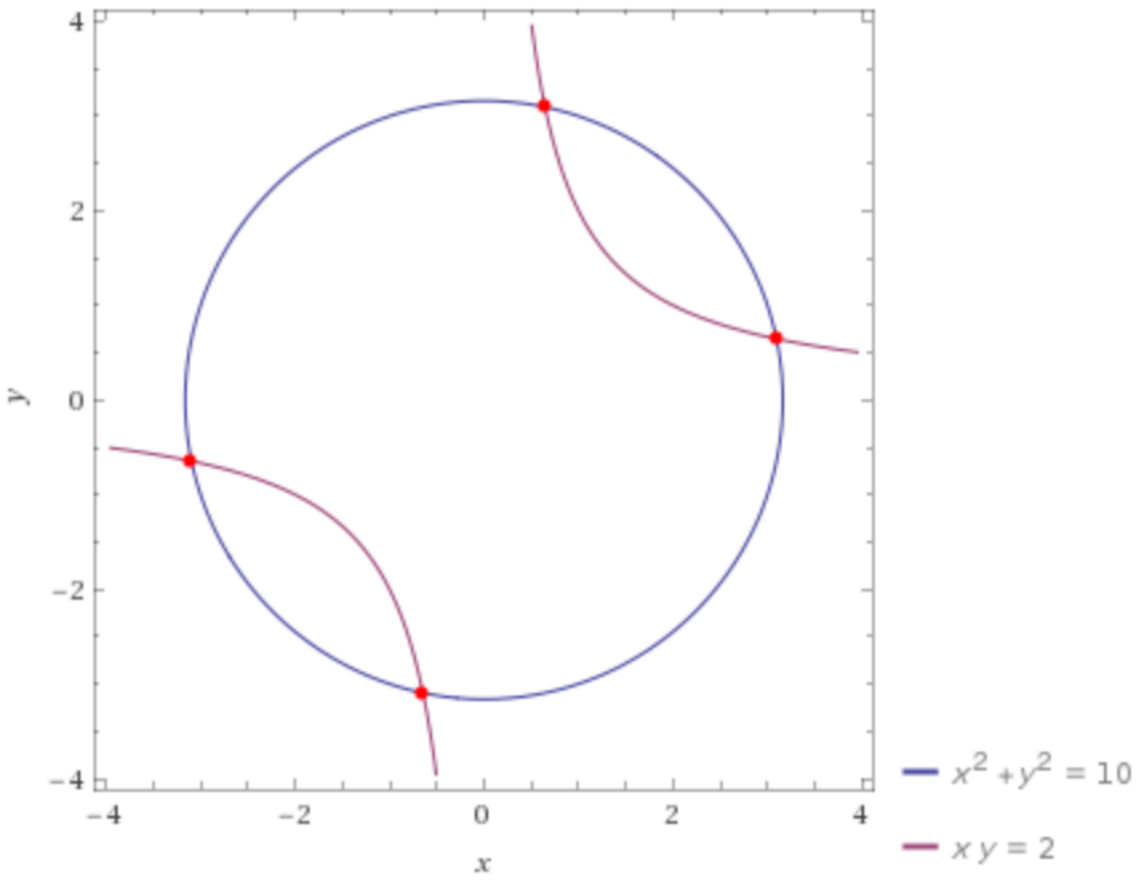
Får iterasjonen

$$(x_{n+1}, y_{n+1}) = (x_n, y_n) - \frac{1}{2x_n^2-2y_n^2}\left(x_n^3 - x_ny_n^2 - 10x_n + 4y_n,\ x_n^2y_n - 4x_n - y_n^3 + 10y_n\right)$$

Input:

$\{x^2 + y^2 = 10, x\,y = 2\}$

Plot of solution set:



Solutions:

$x \approx -0.646084, \quad y \approx -3.09557$

$x \approx 0.646084, \quad y \approx 3.09557$

$x \approx -3.09557, \quad y \approx -0.646084$

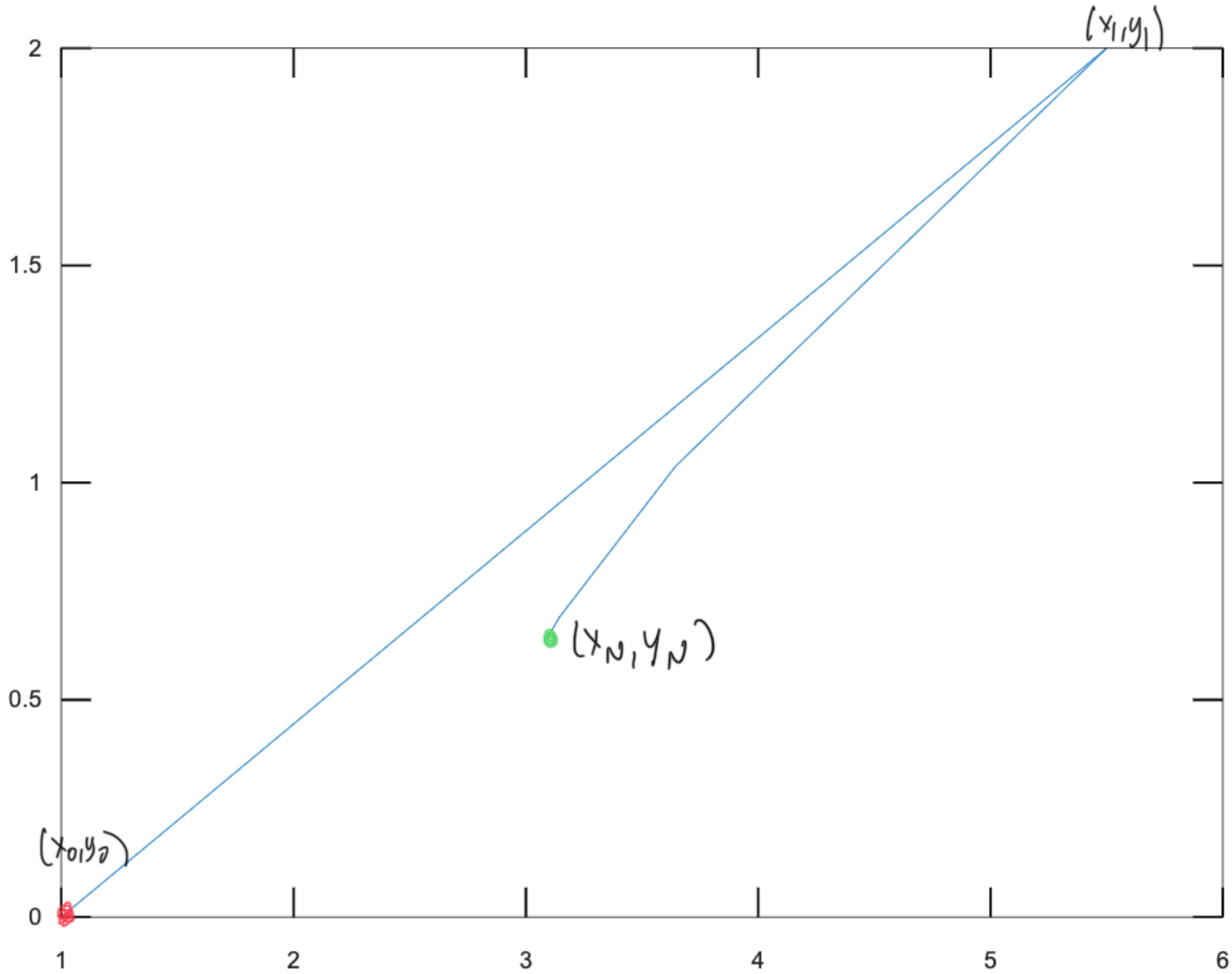
$x \approx 3.09557, \quad y \approx 0.646084$

MATLAB kode:

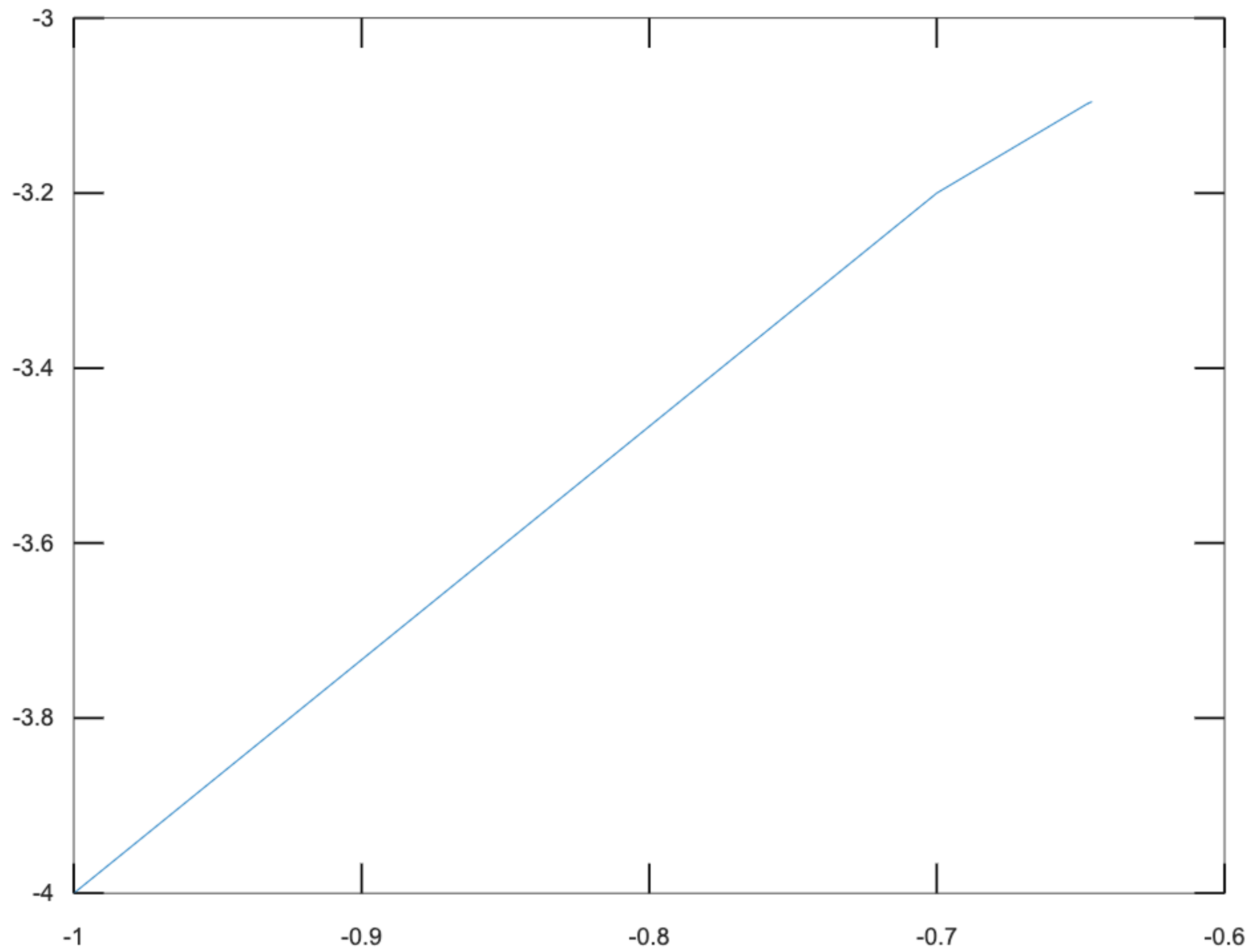
```
function [u,v]=newton(m,k,N)
x=zeros(1,N);
y=zeros(1,N);

x(1)=m;
y(1)=k;
for n=1:N-1
x(n+1)=x(n)-(x(n)^3-x(n)*y(n)^2-10*x(n)+4*y(n))/(2*x(n)^2-2*y(n)^2);
y(n+1)=y(n)-(x(n)^2*y(n)-4*x(n)-y(n)^3+10*y(n))/(2*x(n)^2-2*y(n)^2);
end
plot(x,y)
u=x(N)
v=y(N)
```

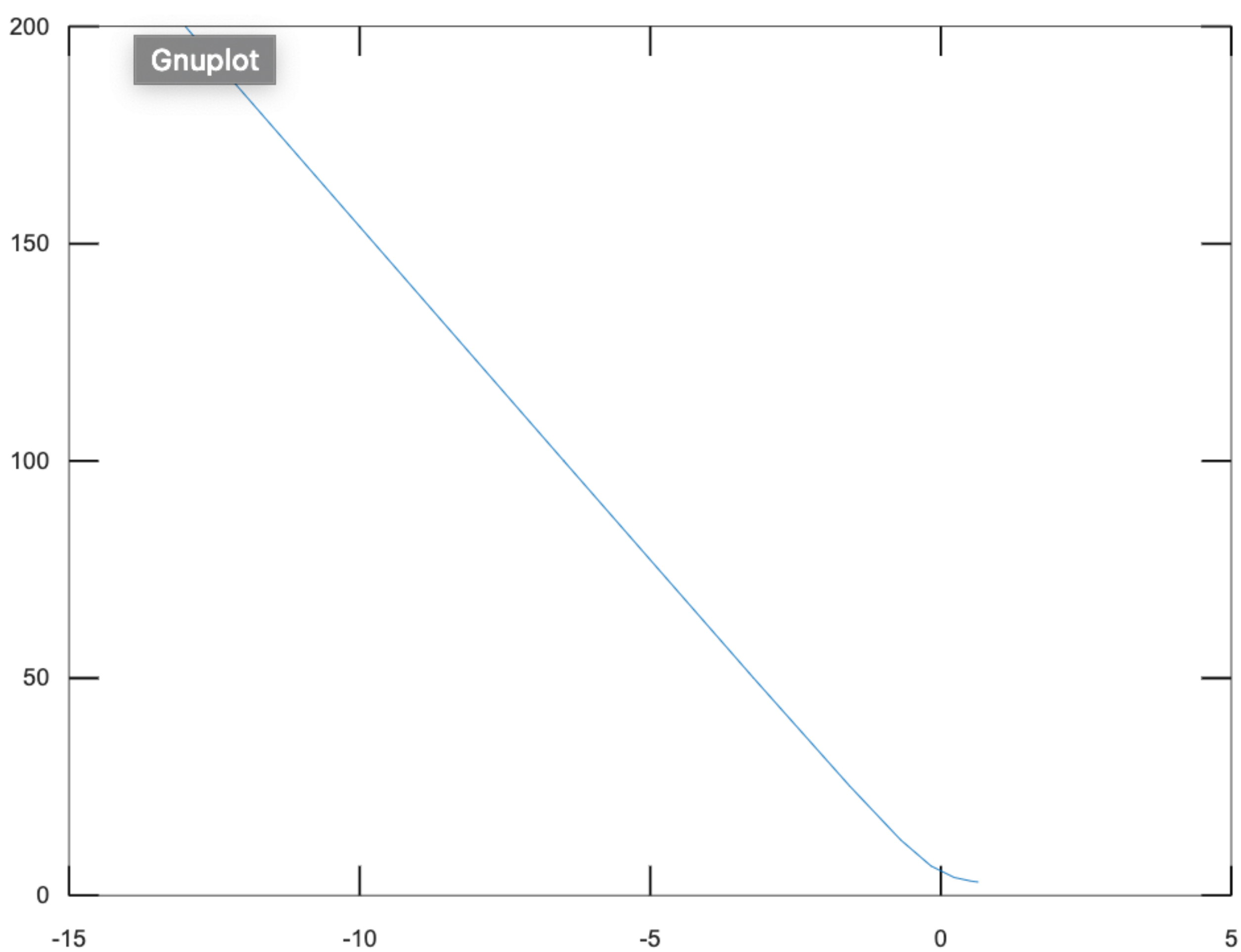
```
octave:3> newton(1,0,100)
u =  3.0956
v =  0.64608
ans =  3.0956
```



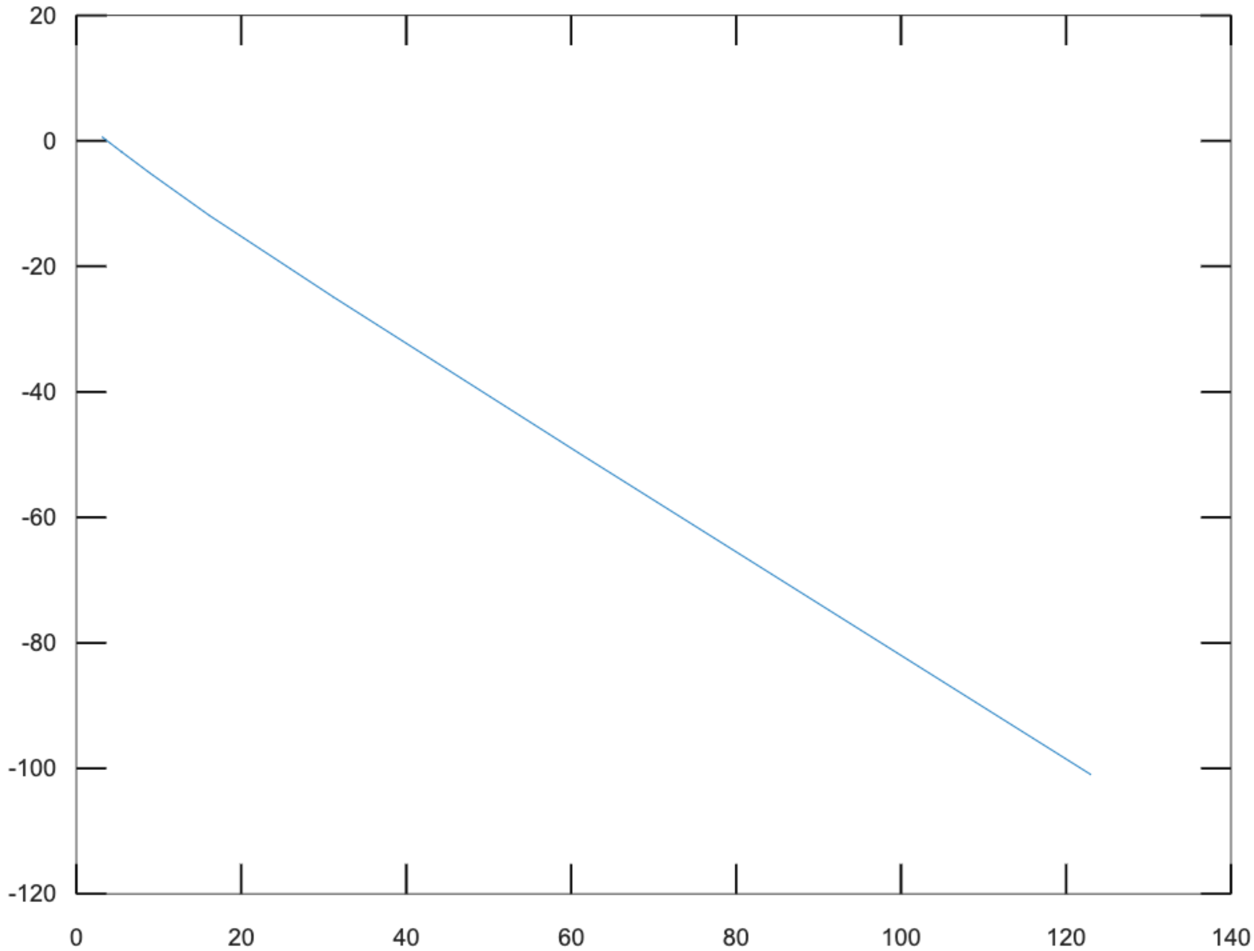
```
octave:4> newton(-1,-4,100)
u = -0.64608
v = -3.0956
ans = -0.64608
```




```
octave:11> newton(-13,200,10)
u =  0.64607
v =  3.0956
ans =  0.64607
```



```
octave:8> newton(123,-101,10)
u =  3.0956
v =  0.64605
ans =  3.0956
```




```
octave:16> newton(10000,1000000,200)
u =  0.64608
v =  3.0956
ans =  0.64608
```