Kurver, vektorfelter, linjeintegraler: oppgaver

Oppgave 1. En parametrisert kurve er gitt ved $\mathbf{r}(t) = t^3\mathbf{i} + e^{-2t}\mathbf{j}$. Akselerasjonvektoren $\mathbf{a}(1)$ i punktet $t = 1$ er da

A) $9\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$
B) $3\mathbf{i} + e^{-2}\mathbf{j}$
C) $6\mathbf{i} - \mathbf{j}$
D) $3\mathbf{i} + (\ln 2)\mathbf{j}$
E) $6\mathbf{i} + 4e^{-2}\mathbf{j}$

$r(t) = (t^3, e^{-2t})$ $\rightsquigarrow$ trenger $a(1)$ $\quad a(t) = r''(t)$

$r'(t) = (3t^2, -2e^{-2t})$

$r''(t) = (6t, 4e^{-2t})$ $\rightsquigarrow$ $a(1) = (6\cdot 1, 4e^{-2\cdot 1}) = (6, 4e^{-2})$

$(= 6i + 4e^{-2}j)$ $\rightsquigarrow$ E

En kurve i $\mathbb{R}^3$ er parametrisert ved $\mathbf{r}(t) = (-\sin(2t), t, \cos(2t))$, $0 \leq t \leq \pi$. Da er buelengden til kurven

Velg ett alternativ

- π
- $\pi\sqrt{2}$
- $2\pi\sqrt{2}$
- $\pi\sqrt{5}$ ✔
- $\sqrt{5}$

$r(t) = (-\sin(2t), t, \cos(2t)) \qquad 0 \le t \le \pi$

$\rightsquigarrow \; r'(t) = (-2\cos(2t), \; 1, \; 2\sin(2t))$

$\rightsquigarrow \; |r'(t)| = \sqrt{4\cos^2(2t) + 1 + 4\sin^2(2t)} = \sqrt{5}$

$\rightsquigarrow$ Buelengden $= \int_0^{\pi} |r'(t)|\, dt = \int_0^{\pi} \sqrt{5}\, dt = \underline{\pi\sqrt{5}}$ $\rightsquigarrow$ D

6 Vektorfeltet $\mathbf{F}(x, y, z) = (2xyz^3, x^2z^3, 3x^2yz^2)$ definert i $\mathbb{R}^3$

Velg ett alternativ

- er ikke konservativt
- er konservativt med potensialfunksjon $\phi(x, y, z) = x^2yz^3$ ✔
- er konservativt med potensialfunksjon $\phi(x, y, z) = x^2yz^2$
- er konservativt med potensialfunksjon $\phi(x, y, z) = xyz^3$
- er konservativt men har ingen potensialfunksjon

To måter å løse denne: ① Sjekke om $\nabla\phi = \mathbb{F}$ for hvert alternativ.

prøver $\phi = x^2 y z^3 \rightsquigarrow \nabla\phi = (2xyz^3,\ x^2z^3,\ 3x^2yz^2) \rightsquigarrow$ B

② Dersom $\mathbb{F}$ er konservativt: finner en ϕ s.a

$\nabla\phi = \mathbb{F} \quad \therefore \quad \dfrac{\partial\phi}{\partial x} = F_1 = 2xyz^3$

$$\rightsquigarrow \phi = \int \frac{\partial\phi}{\partial x}\,dx = \int 2xyz^3\,dx = x^2yz^3 + C(y,z)$$

$$\rightsquigarrow \frac{\partial\phi}{\partial y} = x^2z^3 + C'(y,z) \overset{!}{=} F_2 = x^2z^3$$

$\rightsquigarrow$ kan velge $C(y,z) = c(z)$

$$\rightsquigarrow \frac{\partial\phi}{\partial z} = 3x^2yz^2 + c'(z) \overset{!}{=} F_3 = 3x^2yz^2$$

$\rightsquigarrow$ kan velge $c(z) = 0 \rightsquigarrow$ finner $\underbrace{\phi = x^2yz^3} \rightsquigarrow$ B

La $\boldsymbol{C}$ være kurven i $\mathbb{R}^3$ parametrisert ved $\mathbf{r}(t) = \left(t, \frac{2\sqrt{2}}{3}t^{3/2}, \frac{1}{2}t^2\right), 0 \le t \le 1$. Da blir $\int_C x^2\,ds$

Velg ett alternativ

- $1/2$
- 0
- $3/2$
- 4
- $7/12$ ✔

$r(t) = \left(t, \frac{2\sqrt{2}}{3} t^{3/2}, \frac{1}{2}t^2\right)$ $\quad \int_C x^2 \, ds \quad$ $t \in [0,1]$.

$\rightsquigarrow r'(t) = \left(1, \frac{\cancel{2}\sqrt{2}}{\cancel{3}} \cdot \frac{\cancel{3}}{\cancel{2}} \cdot t^{1/2}, t\right)$

$\rightsquigarrow |r'(t)| = \left(1 + (\sqrt{2}\, t^{1/2})^2 + t^2\right)^{1/2} = \left(1 + 2t + t^2\right)^{1/2}$

$= |t+1|$.

$\rightsquigarrow \int_C x^2 \, ds = \int_0^1 t^2 |t+1| \, dt = \int_0^1 t^3 + t^2 \, dt$

$= \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \underline{\frac{7}{12}}$ $\rightsquigarrow$ E

Oppgave 7. La C være kurven i $\mathbf{R}^3$ parametrisert ved $\mathbf{r}(t) = (t, t^2, t^3)$ for $t \in [0,1]$, og la $\mathbf{F}$ være vektorfeltet gitt ved

$$\mathbf{F}(x,y,z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}.$$

Da er linjeintegralet $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ lik:

A) 0
B) 1/2
C) 1
D) 3/2
E) 2

$r(t) = (t, t^2, t^3)$ $\quad$ $\mathbb{F}(x,y,z) = (x, y, z)$

$t \in [0,1]$ $\quad$ $\rightsquigarrow$ skal finne $\int_C \mathbb{F} \cdot dr$.

$dr = (1, 2t, 3t^2)\, dt$

$$\rightsquigarrow \int_C \mathbb{F} \cdot dr = \int_0^1 \begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ t^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \\ 3t^2 \end{pmatrix} dt$$

$$= \int_0^1 t + 2t^3 + 3t^5 \, dt$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{6} = \frac{3}{2}$$

$\rightsquigarrow$ D

Oppgave 8. La

$$\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$$

være et vektorfelt definert i et åpent område $A \subseteq \mathbf{R}^2$, og anta at alle de partielle deriverte av komponentfunksjonene P og Q er kontinuerlige på A. Hvilket utsagn er sant?

A) Hvis $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ på hele A, så er $\mathbf{F}$ konservativt.
B) Hvis A er enkeltsammenhengende og C er en lukket kurve i A, så er $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$.
C) Hvis A ikke er enkeltsammenhengende, så er ikke $\mathbf{F}$ konservativt.
D) Hvis A er enkeltsammenhengende og $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ på hele A, så har $\mathbf{F}$ en potensialfunksjon på A.
E) Hvis $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ på hele A og A ikke er enkeltsammenhengende, så er ikke $\mathbf{F}$ konservativt.

A) galt generelt, om A ikke enkelt sammenhengende..
B) Galt.
C) Kan godt ha et konservativt felt på en ikke enkeltsammenhengende A
D) Dette er et teorem i boka ✓ $\rightsquigarrow$ D.
E) Som i C).

Et kraftfelt er gitt ved $\mathbf{F}(x, y) = y\cos(xy)\,\mathbf{i} + x\cos(xy)\,\mathbf{j}$. Da er en potensialfunksjon til $\mathbf{F}$ gitt ved:

Velg ett alternativ

- $-\frac{1}{2}x^2\cos(xy) + \frac{1}{2}y^2\cos(xy)$
- $\cos(xy)$
- $\cos(xy)\mathbf{i} + \sin(xy)\mathbf{j}$
- $\mathbf{F}$ har ingen potensialfunksjon.
- $\sin(xy)$

Om $\mathbb{F}$ er konservativt: finner ϕ s.a $\frac{\partial \phi}{\partial x} = y\cos(xy)$

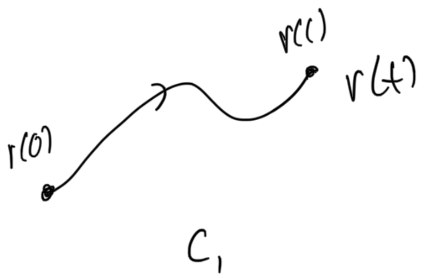
$\rightsquigarrow$ $\phi = \cancel{y} \cdot \frac{\sin(xy)}{\cancel{y}} + C'(y)$ $\rightsquigarrow$ ser at $\phi = \sin(xy)$ funker $\rightsquigarrow$ E

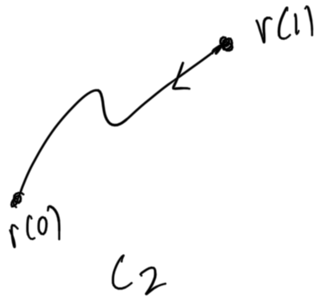
$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(\sin(xy)) = x\cos(xy)$ $\rightsquigarrow$ OK.

La C_1 være en kontinuerlig deriverbar kurve i $\mathbb{R}^n$ gitt ved $\mathbf{r}(t)$, $t \in [0,1]$.
La C_2 være kurven gitt ved $\{\mathbf{r}(1-t) \mid t \in [0,1]\}$
Hvilken av påstandene under er riktig?

Velg ett alternativ

- ○ $\int_{C_1} f\,ds = \int_{C_2} f\,ds$ for alle glatte funksjoner $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.
- ○ $\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ for alle glatte funksjoner $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.
- ○ $\int_{C_1} f\,ds = -\int_{C_2} f\,ds$ for alle glatte funksjoner $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.
- ○ $\int_{C_1} f\,ds = \int_{C_2} f\,ds = 0$ for alle glatte funksjoner $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.
- ○ $\int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ for alle glatte funksjoner $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.





Kun c som er riktig.