Linær algebra: oppgaver

MAT1110 midtveis vår 19

3

La $\mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$ og $\mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$. Vektoren $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Velg ett alternativ

- kan skrives entydig som en lineær kombinasjon av $\mathbf{v_1}$ og $\mathbf{v_2}$ ved $-\frac{2}{3}\mathbf{v_1} + \frac{10}{3}\mathbf{v_2}$
- kan skrives entydig som en lineær kombinasjon av $\mathbf{v_1}$ og $\mathbf{v_2}$ ved $-\frac{2}{3}\mathbf{v_1} + 2\mathbf{v_2}$
- kan ikke skrives som en lineær kombinasjon av $\mathbf{v_1}$ og $\mathbf{v_2}$
- kan skrives som en lineær kombinasjon av $\mathbf{v_1}$ og $\mathbf{v_2}$ på uendelig mange forskjellige måter
- kan skrives entydig som en lineær kombinasjon av $\mathbf{v_1}$ og $\mathbf{v_2}$ ved $-\frac{2}{3}\mathbf{v_1} + 3\mathbf{v_2}$

Vil finne a_1, a_2 s.a $a_1 v_1 + a_2 v_2 - 1 \cdot v_3 = 0$.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -2 \\ 7 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1 \\ 1 & 0 & -2/3 \\ 1 & 2/7 & 2/7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1 \\ 0 & -1/2 & -5/3 \\ 0 & -5/14 & -5/7 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2/3 \\ 0 & 1 & 10/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2/3 \\ 0 & 1 & 10/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} a_1 - (-2/3) = 0 \\ a_2 - (10/3) = 0 \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} a_1 = -\frac{2}{3} \\ a_2 = 10/3 \end{matrix}$$

$\rightsquigarrow$ A

4 La $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. Hvilken påstand er sann?

Velg ett alternativ

- Likningen $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ har kun løsningen $\mathbf{x} = \mathbf{0}$
- Likningen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har uendelig mange løsninger for alle valg av $\mathbf{b}$
- Den reduserte trappeformen til A har kun en pivotsøyle
- Determinanten til A er 0 ✔
- Den reduserte trappeformen til A har tre pivotsøyler

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & 2 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -5/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\longrightarrow$ finnes ikke x s.a $Ax = b$

$\leadsto$ (b) feil.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -5/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

det $A = 0$ fordi A ikke er invertibel

$\leadsto$ (C)

9 Matrisen $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ har

Velg ett alternativ

- ikke to ortonormale egenvektorer
- egenvektorer $(2, 1)$ og $(-1, -1)$
- ikke to lineært uavhengige egenvektorer
- egenvektorer $(1, 1)$ og $(1, -1)$ ✔
- egenvektorer $(1, 2)$ og $(2, -1)$

$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$. $\det(tI - A) = \det \begin{pmatrix} t-5 & 1 \\ 1 & t-5 \end{pmatrix}$

$= (t-5)^2 - 1$

egenverdier: $t - 5 = \pm 1$

$\leadsto t = 6$ eller $t = 4$

egenvektorer:

$t=4$: $tI - A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$v_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \leadsto \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\leadsto x - y = 0$

$\leadsto v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$t=6$

$tI - A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\leadsto$ alternativ D.

10 Vi ser på likningssystemet

$$\begin{aligned} 2x + 2y &= 1 \\ x + 3y &= 3 \\ 6x + 10y &= a \end{aligned}$$

For hvilken verdi av a har systemet en entydig løsning?

Velg ett alternativ

- 8 ✔
- 0
- 2
- 10
- 6

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \\ 6 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ a \end{pmatrix}$$ har en løsning:

$\Leftrightarrow$ $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ a \end{pmatrix}$ = lineær komb. av $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow$ matrisen $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 6 & 10 & a \end{pmatrix}$ er ikke inverterbar

$\Leftrightarrow$ $\det \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 6 & 10 & a \end{pmatrix} = 0$

radreduserer: $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 6 & 10 & a \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & -4 & -5 \\ 0 & 4 & a-3 \end{pmatrix}$

$\rightsquigarrow$ $\det \begin{pmatrix} -4 & -5 \\ 4 & a-3 \end{pmatrix} = 0 = -4(a-3) + 20$ $\Rightarrow a - 3 = 5$

$\Rightarrow \underline{a = 8}$

A

Oppgave 1

Lineæravbildningen $\mathbf{T}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ er slik at

$$T(1,1) = (1,2,3) \qquad \text{og} \qquad T(1,-1) = (3,2,1)$$

Hva er matrisen til lineæravbildningen?

❏ A

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

❏ B

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

❏ C

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

❏ D

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

❏ E

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Har $T(e_1+e_2) = (1,2,3)$
$T(e_1-e_2) = (3,2,1)$

$\leadsto$ $T(2e_1) = (1,2,3)+(3,2,1) = (4,4,4)$

$\leadsto$ $T(e_1) = (2,2,2)$

Videre, $T(2e_2) = (1,2,3)-(3,2,1)$

$= (-2,0,2)$

$\leadsto$ $T(e_2) = (-1,0,2)$

$\Rightarrow$ matrisen er $M = \left[T(e_1) \mid T(e_2) \right]$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$\leadsto$ alternativ B

Oppgave 2

La $\mathbf{F}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ være affinavbildningen gitt ved

$$\mathbf{F}(x,y) = (2x+3+y, -1+x+2y)$$

Med hvilken faktor multipliserer $\mathbf{F}$ arealer?

❏ A -3
❏ B -1
❏ C 0
❏ D 3
❏ E 5

$F(x,y) = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + c \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

faktoren $= \det A \qquad c = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

$= \det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$= 2 \cdot 2 - 1 = 3$ $\leadsto$ alternativ D

Oppgave 8. (3 poeng) Den reduserte trappeformen til matrisen

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{er} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Hva er den generelle løsningen til ligningssystemet

$$\begin{aligned} 2x - y + 3z &= 2 \\ 4x + y + 3z &= 2 \\ x - 2y + 3z &= 1 \end{aligned}$$

A) z kan velges fritt, men da er $y = z$ og $x = -z$
B) $x = -1, y = 1, z = 1$
C) y og z kan velges fritt, $x = 1 + \frac{1}{2}y - \frac{3}{2}z$
D) $x = 2, y = -1, z = -1$
E) Systemet har ingen løsning.

Systemet kan skrives

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{aligned} x + z &= 0 \\ y - z &= 0 \\ -1 &= 0 \end{aligned} \quad \rightsquigarrow \text{ ingen løsning}$$

E

Oppgave 10. La $a > 0$ og $b > 0$ være reelle tall. Hvilken av disse matrisene har 1 som egenverdi?

A) $\begin{pmatrix} 1 & -a \\ b & 1 \end{pmatrix}$

B) $\begin{pmatrix} 0 & -a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

C) $\begin{pmatrix} -1 & a \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

D) $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}$

E) $\begin{pmatrix} 0 & -a \\ b & 0 \end{pmatrix}$

Her er det C) og D) peker seg ut
(de andre matrisene har for mange frihetsgrader).

Vektoren $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ viser seg å være en egenvektor for begge. For D har vi

$$\begin{pmatrix}1 & a\\0 & b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = 1\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \text{egenvektor med egenverdi } 1.$$

D

Oppgave 11. Hvilken vektor er en egenvektor for $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$?

(Fortsettes på side 4.)

A) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

B) $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

C) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

D) $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

E) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Her er det bare å prøve alternativene

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \times$$

$$M\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \times$$

$$M\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \checkmark \quad \text{egenvedi } 3$$

$$M\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \times$$

$$M\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \times$$

$\rightarrow$ C

Sett $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ og $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Da er $A^{10}\mathbf{c}$ lik

Velg ett alternativ

- $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} -2 \\ -5 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 2^{10} \\ 5^{10} \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}$

Prøver A^n for noen lave n:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^2 \cdot A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad A^{10} = A^4 \cdot A^4 \cdot A^2$$
$$= A^2$$

$$\therefore A^{10} c = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$\rightsquigarrow$ alternativ B