UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i: MAT1110 — Kalkulus og Lineær algebra

Eksamensdag: Lørdag 23. Mai 2020

Tid for eksamen: 10:00 – 16:00

Oppgavesettet er på 9 sider.

Vedlegg: Ingen

Tillatte hjelpemidler: Alle

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Settet består av 12 deloppgaver som alle teller like mye. Du må begrunne alle svar, og du må vise nok mellomregninger til at man lett kan følge argumentene dine.

Oppgave 1

Vi skal se på ligningssystemet

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 &= 14 \\ -x_1 + 2x_2 &= a \\ 2x_1 + x_2 &= 7. \end{aligned}$$

a

For hvilke verdier av a har systemet en entydig løsning? For hvilke verdier av a har systemet ingen løsninger?

Løsning: Vi radreduserer den utvidede matrisen

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 14 \\ -1 & 2 & a \\ 2 & 1 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 14 \\ 0 & 6 & a+14 \\ 0 & -7 & -21 \end{pmatrix}$$
$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 14 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 6 & a+14 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 14 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & a-4 \end{pmatrix}.$$

Vi ser nå at første og andre søyle er pivotsøyler, slik at systemet ikke kan ha uendelig mange løsninger. Hvis $a \neq 4$ så er siste søyle en pivotsøyle, og systemet har ikke løsning. Hvis $a = 4$ så har systemet en entydig løsning.

b

La $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Finn en vektor $\mathbf{v}_3$ slik at $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ utgjør en basis for $\mathbb{R}^3$.

(Fortsettes på side 2.)

Løsning: Det er nok å finne en vektor $\mathbf{v}_3$ på formen $\begin{pmatrix} 14 \\ a \\ 7 \end{pmatrix}$ slik at den reduserte trappeformen over har tre pivotsøyler. Det får vi til ved å velge $a \neq 4$ over. Med $a = 0$ får vi for eksempel høyresiden $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 14 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$.

Man kan også løse denne oppgaven ved å radredusere $\begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 \end{pmatrix}$, sette inn en enhetsvektor, og gjøre de inverse radoperasjonene i motsatt rekkefølge.

Oppgave 2

Vis at feltet

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (3y^2z^3, 6xyz^3 + z, 9xy^2z^2 + y)$$

er konservativt, og skriv ned en potensialfunksjon $\phi(x, y, z)$.
Løsning: En potensialfunksjon må oppfylle

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial x} &= 3y^2z^3 \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} &= 6xyz^3 + z \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} &= 9xy^2z^2 + y. \end{aligned}$$

Integrasjon gir nå

$$\begin{aligned} \phi(x, y, z) &= 3xy^2z^3 + C(y, z) \\ \phi(x, y, z) &= 3xy^2z^3 + yz + D(x, z) \\ \phi(x, y, z) &= 3xy^2z^3 + yz + E(x, y), \end{aligned}$$

der C, D, og E er funksjoner. Vi ser at vi kan få likhet over ved å velge $C(y, z) = yz$, og $D = E = 0$. Dette gir at $\phi(x, y, z) = 3xy^2z^3 + yz$, og feltet er dermed konservativt.

Oppgave 3

Vi skal se på funksjonen $\mathbf{F}(x, y, z) = (y^2 + 2z^2, 2x^2 + z^2, x^2 + y^2)$. Forklar at $\mathbf{F}$ har en omvendt funksjon $\mathbf{G}$ definert i en omegn om $(3, 3, 2)$ slik at $\mathbf{G}(3, 3, 2) = (1, 1, 1)$, og finn $\mathbf{G}'(3, 3, 2)$.
Løsning: Vi har at $\mathbf{F}(1, 1, 1) = (3, 3, 2)$, og

$$\mathbf{F}' \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2y & 4z \\ 4x & 0 & 2z \\ 2x & 2y & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{F}' \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 4 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

(Fortsettes på side 3.)

Vi sjekker om $\mathbf{F}'(1,1,1)$ er inverterbar:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -1 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/5 & 1/10 & -1/5 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1/10 & 1/5 & 1/10 \\ 0 & 1 & 0 & 1/10 & -1/5 & 2/5 \\ 0 & 0 & 1 & 1/5 & 1/10 & -1/5 \end{pmatrix}.$$

Derfor er $\mathbf{F}'(1,1,1)$ inverterbar med invers $\begin{pmatrix} -1/10 & 1/5 & 1/10 \\ 1/10 & -1/5 & 2/5 \\ 1/5 & 1/10 & -1/5 \end{pmatrix}$. Omvendt funksjonsteorem sier da at $\mathbf{F}$ har en omvendt funksjon $\mathbf{G}$ definert i en omegn om $\mathbf{F}(1,1,1) = (3,3,2)$, slik at $\mathbf{G}(3,3,2) = (1,1,1)$ og

$$\mathbf{G}'(3,3,2) = \begin{pmatrix} -1/10 & 1/5 & 1/10 \\ 1/10 & -1/5 & 2/5 \\ 1/5 & 1/10 & -1/5 \end{pmatrix}.$$

Oppgave 4

Denne oppgaven inneholder programmering. Jeg har valgt den for prøveeksamen fremfor eksamen da den kanskje er litt mer programmeringsrettet enn det vi er vant med. Forvent en oppgave med programmering på eksamen, som ikke inneholder like mye kode. Matlab og Python er likestilt for dere på eksamen.

Vi skal modellere spredningen av et virus i Norge. Vi antar at befolkningen er 5.000.000, og at vi starter med 10 smittede. I en situasjon der ingen er immune antar vi at hver smittet person ved tidspunkt $t = n$ smitter $R = 1.2$ andre (som hverken er syke ellere immune), slik at disse er smittet ved tid $t = n + 1$. Vi antar også at smittede ved tid $t = n$ blir immune ved tid $t = n + 1$.

a

Forklar at

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - \frac{R x_n y_n \cdot 10^{-6}}{5} \\ y_{n+1} &= \frac{R x_n y_n \cdot 10^{-6}}{5} \\ z_{n+1} &= z_n + y_n, \end{aligned}$$

(Fortsettes på side 4.)

der, ved tid $t = n$, x_n er antall personer som hverken er syke eller immune, y_n er antall syke, og z_n er antall immune. Forklar spesielt produktleddet $\frac{Rx_ny_n\cdot 10^{-6}}{5}$.

Løsning: Produktleddet $\frac{Rx_ny_n\cdot 10^{-6}}{5}$ representerer antall nye smittede ved tid $t = n + 1$. Hvis ingen er immune er antall nye smittede Ry_n. Hvis flere er immune vil andelen som er mottagelig for smitte være $x_n/5.000.000$. Ganger vi dette tallet med Ry_n får vi det gitte produktleddet. I formelen for x_{n+1} redusereres bare x_n med antall nye smittede, og y_{n+1} blir også oppdatert med dette tallet. Siden de som var smittet blir immune ett tidssteg senere, så blir y_n lagt til z_{n+1}.

b

Forklar følgende kode, linje for linje (du kan velge selv om du forklarer Matlabkoden, eller Pythonkoden). Hvis du kjører koden vil du se at de tre kurvene som plottes flater ut på tre verdier. Gi din tolkning av dette.

```
population = 5000000;
smittede_start = 10;
R = 1.2;
x_0 = [population-smittede_start; smittede_start; 0];
N = 100;
vals=zeros(3,N);
x(:,1)=x_0;

for k=2:N
    x(:,k) = F(x(:,(k-1)), R, population);
end

plot(1:N, x(1,:), 1:N, x(2,:), 1:N, x(3,:));
legend('ikke immune eller syke', 'syke', 'immune');

max(x(2,:))
100*x(3,N)/population

function y=F(x, R, population)
    smittede_nye = R*x(1)*x(2)/population;
    y=[x(1)-smittede_nye; smittede_nye; x(3)+x(2)];
end
```

```
from numpy import *
import matplotlib.pyplot as plt

def F(x, R, population):
    smittede_nye = R*x[0]*x[1]/population
    return array([x[0]-smittede_nye,smittede_nye, x[2]+x[1]])

population = 5000000
smittede_start = 10
R = 1.2
```

(Fortsettes på side 5.)

```
x_0 = array([population-smittede_start, smittede_start, 0])
N = 100
x = zeros((3,N))
x[:,0] = x_0


for k in range(1,N):
    x[:,k] = F(x[:,k-1], R, population)

plt.plot(arange(1,N+1), x[0,:], arange(1,N+1), x[1,:], arange(1,N+1), x[2,:])
plt.legend(['ikke immune eller syke', 'syke', 'immune'])
plt.show()

print(max(x[1,:]))
print(100*x[2,N-1]/population)
```

Løsning: I starten blir initialverdiene x_0, y_0, og z_0 satt. Funksjonen F regner ut $(x_{n+1}, y_{n+1}, z_{n+1})$ fra (x_n, y_n, z_n). Denne blir kjørt i 100 iterasjoner i en for-løkke, og verdiene vi får blir plottet mot hverandre.

c

Koden over skriver tallene 78270 og 32.28 til skjerm. Hva sier disse tallene oss hvis 1% av alle syke havner på intensivavdeling, og det er 500 intensivplasser på sykehusene i Norge?

Løsning: Det første tallet som skrives er maksimumsverdien vi får for antall syke. Siden 1% av 78270 er 782.7, og det er bare 500 intensivplasser, så betyr det at det ikke er nok intensivplasser i Norge.

Det andre tallet som skrives er prosentdelen som er immune etter alle N tidsstegene. Det ser ut som både antall immune, og antall friske som ikke er immune flater ut på bestemte nivåer. I disse dager omtales dette som *flokkimmunitet*.

Oppgave 5

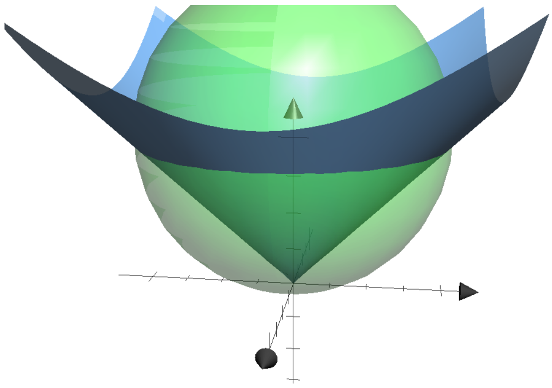
Regn ut volumet av området i $\mathbb{R}^3$ som er avgrenset av flaten gitt i kulekoordinater ved $\rho = 2\cos\phi$, og som ligger over kjeglen $z = \sqrt{x^2+y^2}$. Området er vist i Figur 1.

Løsning: Kjeglen er gitt i kulekoordinater ved at $\phi = \pi/4$. Vi får derfor

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{\pi/4} \left[\int_0^{2\cos\phi} \rho^2 \sin\phi \, d\rho \right] d\phi \right] d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{\pi/4} \frac{8}{3}\cos^3\phi \sin\phi \, d\phi \right] d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left[-\frac{2}{3}\cos^4\phi \right]_0^{\pi/4} d\theta = \frac{2}{3}(1-1/4)2\pi = \pi. \end{aligned}$$

Legg merke til at $\rho = 2\cos\phi$ beskriver en kule med radius 1 og sentrum $(0,0,1)$: $\rho = 2\cos\phi$ er det samme som at $\rho^2 = 2\rho\cos\phi$, som kan skrives som $x^2+y^2+z^2 = 2z$, som igjen kan skrives som $x^2+y^2+(z-1)^2 = 1$.

(Fortsettes på side 6.)



Figur 1: Området avgrenset av en kjegle og en flate

Oppgave 6

Finn konvergensområdet for rekken $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n(n-1)4^n}$, og finn et uttrykk for summen.

Løsning: Forholdstesten gir at

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)n4^{n+1}}}{\frac{x^n}{n(n-1)4^n}}\right| = |x|\frac{n(n-1)}{4(n+1)n},$$

som går mot $|x|/4$ når $n \to \infty$. Rekka konvergerer derfor absoloutt for $|x| < 4$. Når $|x| = 4$ kan vi sammenligne med $\sum_n 1/n^2$ for å konkludere at rekka konvergerer. Konvergensområdet blir derfor $[-4, 4]$.

La $S(x)$ være summen av rekka. Leddvis derivasjon to ganger gir

$$S'(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)4^n}$$
$$S''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n-2}}{4^n} = \frac{1}{16(1-x/4)}.$$

Integrasjon gir nå

$$S'(x) - S'(0) = S'(x) = \left[-\frac{1}{4}\ln(1-t/4)\right]_0^x = -\frac{1}{4}\ln(1-x/4).$$

Delvis integrasjon gir nå at

$$\begin{aligned} S(x) - S(0) = S(x) &= -\frac{1}{4}\left[t\ln(1-t/4) + \frac{1}{4}\int \frac{t}{1-t/4}\,dt\right]_0^x \\ &= -\frac{x}{4}\ln(1-x/4) - \frac{1}{16}\int_0^x \frac{t-4+4}{1-t/4}\,dt \\ &= -\frac{x}{4}\ln(1-x/4) - \frac{1}{16}[-4t - 16\ln(1-t/4)]_0^x \\ &= \left(1-\frac{x}{4}\right)\ln(1-x/4) + \frac{x}{4}. \end{aligned}$$

(Fortsettes på side 7.)

Denne gjelder for $x \in (-4, 4)$. For $x = -4$ og $x = 4$ gir Abels teorem at

$$\begin{aligned}
S(4) &= \lim_{x \to 4^-} S(x) = \lim_{x \to 4^-} \left(\left(1 - \frac{x}{4}\right) \ln(1 - x/4) + \frac{x}{4} \right) \\
&= \lim_{x \to 4^-} \frac{\ln(1 - x/4)}{\frac{1}{1-\frac{x}{4}}} + 1 \\
&= \lim_{x \to 4^-} \frac{-\frac{1}{4(1-x/4)}}{\frac{1}{4(1-\frac{x}{4})^2}} + 1 = \lim_{x \to 4^-} -(1 - x/4) + 1 = 0 + 1 = 1 \\
S(-4) &= \lim_{x \to -4^+} S(x) = \lim_{x \to -4^+} \left(\left(1 - \frac{x}{4}\right) \ln(1 - x/4) + \frac{x}{4} \right) = 2 \ln 2 - 1,
\end{aligned}$$

hvor vi brukte L'hospitals regel i det ene endepunktet. Vi får dermed at

$$S(x) = \begin{cases} ((1 - \frac{x}{4}) \ln(1 - x/4) + \frac{x}{4}) & x \in [-4, 4) \\ 1 & x = 4. \end{cases}$$

Oppgave 7

Vi skal lage en container med et gitt volum V. Bunnen er dobbelt så dyr per kvadratmeter som de andre 5 sidene (topp og sider). Hvordan bør dimensjonene på containeren være for at containeren skal bli billigst mulig?
Løsning: Hvis sidene er x, y, og z (der z er høyden) så har bunnen areal xy, mens de andre flatene har areal $2xz + 2yz + xy$ til sammen. Funksjonen $f(x, y, z) = 2xz + 2yz + xy + 2xy = 3xy + 2xz + 2yz$ gir dermed et mål for prisen på containeren. Man kan nå fortsette med Lagranges metode med betingelsen $g(x, y, z) = xyz - V = 0$ (metode 1), eller ved å substituere $z = V/(xy)$ i f (metode 2).

Bruker man metode 1 må vi løse $\nabla f = \lambda \nabla g$ ($\nabla g = \mathbf{0}$ er bare mulig hvis en av x, y, z er 0, som strider mot betingelsen), som gir ligningene

$$\begin{aligned}
3y + 2z &= \lambda yz \\
3x + 2z &= \lambda xz \\
2x + 2y &= \lambda xy.
\end{aligned}$$

Ve å gang opp dette med x, y, og z får vi ligningene

$$\begin{aligned}
3xy + 2xz &= \lambda xyz \\
3xy + 2yz &= \lambda xyz \\
2xz + 2yz &= \lambda xyz.
\end{aligned}$$

Sammenligner vi de to første ligningene ser vi at $x = y$, sammenligner vi de to siste ligningene ser vi at $z = 3y/2$. Innsatt i $xyz = V$ gir dette at $x = y = \sqrt[3]{\frac{2V}{3}}$, og at $z = V/(xy) = (3/2)^{2/3} V^{1/3}$. Vi får altså bare en kandidat, og vi må begrunne hvorfor dette må være et globalt minimum.

Anta $x \leq \epsilon$, der ϵ er liten. Da må $yz = V/x \geq V/\epsilon$, slik at overflaten (og dermed prisen) blir stor.

Anta så at $x \geq N$, der N er veldig stor. Da må yz være liten, som igjen medfører at en av y og z er små, og det følger fra argumentet over at prisen blir stor.

(Fortsettes på side 8.)

Vi kan derfor begrense oss til et lukket begrenset område på formen $\epsilon \leq x, y, z \leq N$ der vi vet at vi må ha et minimum, som da må være et globalt minimum. Eneste kandidat er det punktet vi har funnet.

Bruker man metode 2 får vi først den nye funksjonen $h(x, y) = 3xy + 2V/x + 2V/y$, som har gradient

$$\nabla h = \begin{pmatrix} 3y - 2V/x^2 \\ 3x - 2V/y^2 \end{pmatrix}.$$

Denne er 0 når $yx^2 = y^2x = \frac{2}{3}V$. Det er da klart at (som for metode 1) $x = y = \sqrt[3]{\frac{2V}{3}}$, og at $z = V/(xy) = (3/2)^{2/3}V^{1/3}$. Det er flere måter å argumentere for at dette er et minimum. Bruker man andrederiverttesten får vi først

$$Hh(x, y) = \begin{pmatrix} 4V/x^3 & 3 \\ 3 & 4V/y^3 \end{pmatrix}.$$

Determinanten til denne er $16V^2/(x^3y^3) - 9 = 16V^2/(4V^2/9) - 9 = 25 > 0$. Siden $4V/x^3 > 0$ er derfor punktet vi har funnet et minimum.

Oppgave 8

Regn ut dobbeltintegralet

$$\int_0^1 \int_{y^{1/3}}^1 \frac{\sin(\pi x^2)}{x^2} dx dy$$

Hint: Her er det nok lurt å beskrive integrasjonsområdet på en annen måte.
Løsning: Vi merker oss først at funksjonen som integreres er kontinuerlig på hele integrasjonsområdet dersom vi definerer funksjonensverdien til å være π i punktene der $x = 0$. (Dette følger av L'Hopitals regel).

Ved å bytte integrasjonsrekkefølge får vi da

$$\int_0^1 \left[\int_0^{x^3} \frac{\sin(\pi x^2)}{x^2}\, dy \right] dx = \int_0^1 x \sin(\pi x^2)\, dx = \left[-\frac{1}{2\pi} \cos(\pi x^2) \right]_0^1 = \frac{1}{\pi}.$$

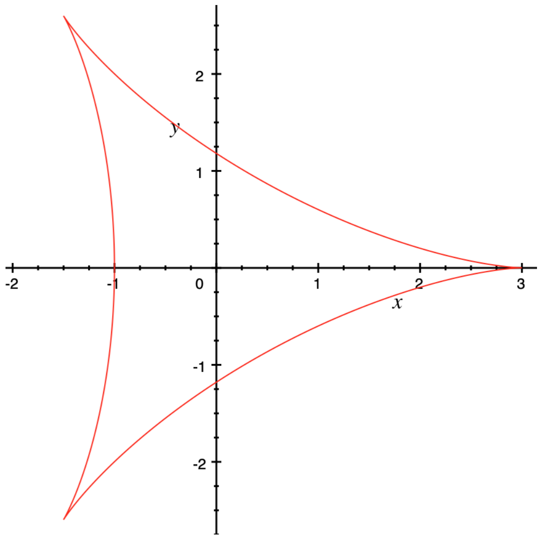
Oppgave 9

Regn ut arealet avgrenset av kurven

$$\mathbf{r}(t) = (2\cos t + \cos(2t), 2\sin t - \sin(2t)),$$

der $0 \leq t \leq 2\pi$ (se Figur 2).
Løsning: Vi ser at $\mathbf{r}(0) = (3, 0)$. Vi ser også at $x'(t) = -2\sin t - 2\sin(2t)$ og at $y'(t) = 2\cos t - 2\cos(2t) = 2(\cos t - \cos(2t))$. Når t er liten og $t > 0$ ser vi da at $x'(t) < 0$ og $y'(t) > 0$. Fra dette er det klart hvilken retning kurven

(Fortsettes på side 9.)



Figur 2: En kurve i planet

tar fra $t = 0$: Den løpes gjennom mot klokka. Da gir Greens teorem

$$\begin{aligned}
A &= \int_{\mathcal{C}} x\,dy = \int_0^{2\pi} (2\cos t + \cos(2t))(2\cos t - 2\cos(2t))\,dt \\
&= 4\int_0^{2\pi} \cos^2 t\,dt - 2\int_0^{2\pi} \cos^2(2t)\,dt - 2\int_0^{2\pi} \cos t\cos(2t)\,dt \\
&= 2\int_0^{2\pi} (1+\cos(2t))\,dt - \int_0^{2\pi} (1+\cos(4t))\,dt - 2\int_0^{2\pi} \cos t(1 - 2\sin^2 t)\,dt \\
&= 4\pi - 2\pi - 2\left[\sin t - \frac{2}{3}\sin^3 t\right]_0^{2\pi} = 4\pi - 2\pi = 2\pi.
\end{aligned}$$

Denne kurven kalles også for en *deltoide*.