Prøveeksamen 2020

Oppgave 1

a)
$$x_1 + 4x_2 = 14$$
$$-x_1 + 2x_2 = a$$
$$2x_1 + x_2 = 7$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 14 \\ -1 & 2 & a \\ 2 & 1 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 14 \\ 0 & 6 & a+14 \\ 0 & -7 & -21 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 14 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 6 & a+14 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 14 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & a-4 \end{pmatrix}$$

Ser at første og andre søyle er pivotsøyler.
Derfor kan ikke systemet uendelig mange løsninger.

$a \neq 4$: Siste søyle er da en pivotsøyle (del med $a-4$)
Systemet har da ikke løsning.

$a = 4$: Siste søyle er ikke en pivotsøyle

Systemet har entydig løsning:

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad x_1 = 2 \ , x_2 = 3 \text{ løsning.}$$

b) Det er nok å finne en vektor $\vec{v}_3$ som ikke kan skrives som en lineærkomb-inasjon av $\vec{v}_1$ og $\vec{v}_2$:

Hvis $a \neq 4$ over får vi til dette

(da blir alle søyler over pivotsøyler.)

Vi kan sette $a = 0$, og får da $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 14 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$.

Oppgave 2

En potensialfunksjon må oppfylle:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = 3y^2z^3$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = 6xyz^3 + z$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 9xy^2z^2 + y$$

Integrasjon gir nå:

$$\phi(x,y,z) = \underline{3xy^2z^3} \qquad + C(y,z)$$

$$\phi(x,y,z) = \underline{3xy^2z^3} + yz + D(x,z)$$

$$\phi(x,y,z) = \underline{3xy^2z^3} + yz \quad + E(x,y)$$

Vi kan få likhet over ved å velge $C(y,z) = yz$, $D(x,z) = E(x,y) = 0$.

Vi får da

$$\phi(x,y,z) = 3xy^2z^3 + yz$$

Spesielt er feltet konservativt.

Oppgave 3

$$\vec{F}(x,y,z) = (y^2+2z^2, 2x^2+z^2, x^2+y^2)$$

$$\vec{F}(1,1,1) = (1^2+2\cdot1^2, 2\cdot1^2+1^2, 1^2+1^2) = (3,3,2).$$

$$\vec{F}'(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 & 2y & 4z \\ 4x & 0 & 2z \\ 2x & 2y & 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{F}'(1,1,1) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 4 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Vi sjekker om $\vec{F}'(1,1,1)$ er inverterbar:

$$\left(\begin{array}{cccccc} 0 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{III-2I}{\sim} \left(\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{III-2II}{\sim} \left(\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & -1 & -\frac{1}{2} & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{III/(-5)}{\sim} \left(\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{1}{10} & -\frac{1}{5} \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} I-\frac{1}{2}III \\ II-2III \\ \sim \end{array} \left(\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{10} & \frac{1}{5} & \frac{1}{10} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{10} & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{1}{10} & -\frac{1}{5} \end{array}\right)$$

mellomregning:

$$\left(\begin{array}{l} \frac{1}{2}-\frac{2}{5}=\frac{1}{10} \\ \frac{1}{4}-\frac{1}{20}=\frac{5-1}{20}=\frac{4}{20}=\frac{1}{5} \end{array}\right)$$

Derfor er $\vec{F}(1,1,1)$ inverterbar, med invers

$$\left(\vec{F}'(1,1,1)\right)^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{10} & \frac{1}{5} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{10} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

Omvendt funksjonsteorem sier da at $\vec{F}$ har en omvendt funksjon $\vec{G}$ definert i en omegn om $\vec{F}(1,1,1) = (3,3,2)$, slik at $\vec{G}(3,3,2) = (1,1,1)$, og

$$\vec{G}'(3,3,2) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{10} & \frac{1}{5} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{10} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix} = \left(\vec{F}'(1,1,1)\right)^{-1}.$$

Oppgave 4

Produktleddet $\frac{R x_n y_n \cdot 10^{-6}}{5}$ representerer antall nye smittede ved tid $t = n+1$.

Hvis ingen er immune: $R y_n$ antall nye smittede.
Hvis flere er immune vil andelen som er mottagelig for smitte være $\frac{x_n}{5.000.000} = \frac{x_n \cdot 10^{-6}}{5}$
Ganges denne andelen med $R y_n$ får vi produktleddet.

I formelen for x_{n+1} reduseres x_n med antall nye smittede. y_{n+1} blir også oppjustert med dette tallet. z_{n+1} blir oppjustert med y_n, de som tidligere var syke.

b) I starten blir initialverdiene (x_0, y_0, z_0) satt

F regner ut $(x_{n+1}, y_{n+1}, z_{n+1})$ fra (x_n, y_n, z_n).

F blir kjørt i 99 iterasjoner i en for-løkke. Verdiene vi får blir plottet mot hverandre.

c) Det første tallet som skrives er maksimumsverdien vi får for antall syke.

1% av 78270 er 782.7.

Hvis det bare er 500 intensivplasser, så er det ikke nok intensivplasser i Norge.

Det andre tallet er prosentdelen som er immune etter alle N tidsstegene (32.28%)

Flokkimmunitet.

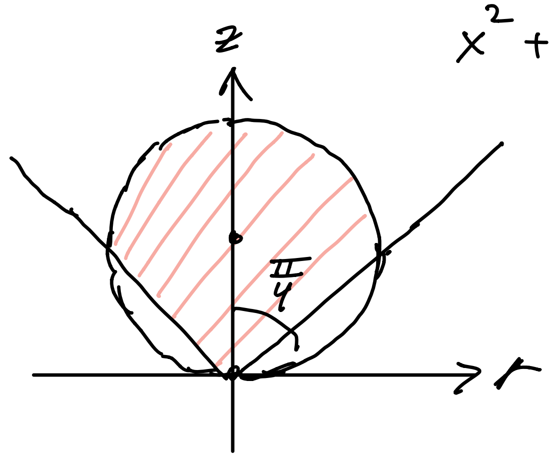
Oppgave 5

Legg merke til at $\rho = 2\cos\phi$ beskriver en kule med radius 1, sentrum $(0,0,1)$:

$$\rho = 2\cos\phi \iff \underbrace{\rho^2 = 2\rho\cos\phi}$$

$$x^2+y^2+z^2 = 2z$$

$$x^2+y^2+(z-1)^2 = 1.$$



$$z = \sqrt{x^2+y^2} = r$$

Grensene for området:

$$0 \le \phi \le \frac{\pi}{4}$$

$$0 \le \theta \le 2\pi$$

$$0 \le \rho \le 2\cos\phi$$

$$V = \int_0^{2\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[\int_0^{2\cos\phi} \rho^2 \sin\phi \, d\rho\right] d\phi\right] d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left[\frac{1}{3}\rho^3\sin\phi\right]_0^{2\cos\phi} d\phi\right] d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \Big[\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{8}{3} \cos^3\phi \sin\phi \, d\phi \Big] d\theta \qquad u = \cos\phi$$

$$= \int_0^{2\pi} \Big[-\frac{2}{3}\cos^4\phi \Big]_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{2}{3}\left(1 - \frac{1}{4}\right) d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 2\pi = \underline{\underline{\pi}}$$

Oppgave 6

Vi ser på $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n(n-1)4^n}$

Forholdstesten:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left| \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)n\,4^{n+1}}}{\frac{x^n}{n(n-1)4^n}} \right| = |x| \frac{n(n-1)}{4(n+1)n},$$

som går mot $\left|\frac{x}{4}\right|$ når $n \to \infty$.

Rekka konvergerer derfor absolutt når $|x| < 4$.

Når $|x| = 4$ kan vi sammenligne med rekka $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ for å konkludere at rekka konvergerer.

Konvergensområdet blir derfor $\underline{\underline{[-4, 4]}}$

$$S(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n(n-1)4^n}$$

Deriverer leddvis:

$$S'(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)4^n}$$

$$S''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n-2}}{4^n} = \frac{1}{16} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{x}{4}\right)^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{4}\right)^n$$

$$= \frac{1}{16\left(1-\frac{x}{4}\right)}$$

$u = 1 - \frac{x}{4}$

$du = -\frac{1}{4}dx$

Integrasjon (fra 0 til x) gir

$$S'(x) - S'(0) = S'(x) = \left[-\frac{1}{4}\ln\left(1-\frac{t}{4}\right)\right]_0^x$$

$$= -\frac{1}{4} \cdot \ln\left(1 - \frac{x}{4}\right)$$

Integrasjon igjen (delvis integrasjon)

$$S(x) - S(0) = S(x) = -\frac{1}{4}\left[t\ln\left(1-\frac{t}{4}\right) + \frac{1}{4}\int \frac{t}{1-\frac{t}{4}}\,dt\right]_0^x$$

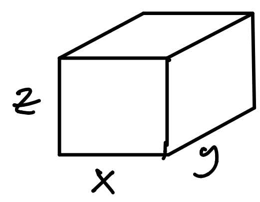
$$= -\frac{1}{4}x\ln\left(1-\frac{x}{4}\right) - \frac{1}{16}\int_0^x \frac{t-4+4}{1-\frac{t}{4}}\,dt$$

$$= -\frac{x}{4}\ln\left(1-\frac{x}{4}\right) - \frac{1}{16}\left[-4t - 16\ln\left(1-\frac{t}{4}\right)\right]_0^x$$

$$= \frac{x}{4} + \left(1 - \frac{x}{4}\right)\ln\left(1-\frac{x}{4}\right).$$

Oppgave 7

Kall sidene for x, y, og z (z høyden)



bunn: xy

sider: $2xz + 2yz$

topp: xy

pris: $2xy + 2xz + 2yz + xy$

$$f(x,y,z) = 3xy + 2xz + 2yz$$

gir dermed et mål på prisen på containeren.

Lagranges metode med betingelse $g(x,y,z) = xyz - V = 0$

Vi kan også substituere $z = \frac{V}{xy}$ i f:

Da får vi $h(x,y) = 3xy + \frac{2V}{y} + \frac{2V}{x}$

$$\nabla h(x,y) = \begin{pmatrix} 3y - \frac{2V}{x^2} \\ 3x - \frac{2V}{y^2} \end{pmatrix}$$

Denne er 0 når $\underbrace{yx^2 = y^2x}_{x=y} = \frac{2}{3}V$

$$\left(x^3 = \frac{2}{3}V\right)$$

$$x^3 = \frac{2}{3}V \quad \Rightarrow \quad x = y = \sqrt[3]{\frac{2V}{3}}.$$

$$z = \frac{V}{xy} = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{3}} V^{\frac{1}{3}}$$

Andrederivertesten:

$$Hh(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{4V}{x^3} & 3 \\ 3 & \frac{4V}{y^3} \end{pmatrix}$$

Determinant: $\frac{16V^2}{x^3y^3} - 9 = \frac{16V^2}{\frac{4}{9}V^2} - 9$

$$= 36 - 9 = 25 > 0$$

Siden $A = \frac{4V}{x^3} > 0$ er derfor punktet et min.

Lagrange:

$$f(x,y,z) = 3xy + 2xz + 2yz$$

$$g(x,y,z) = xyz - V = 0$$

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 3y + 2z \\ 3x + 2z \\ 2x + 2y \end{pmatrix} \qquad \nabla g = \begin{pmatrix} yz \\ xz \\ xy \end{pmatrix} \neq 0$$

$\nabla f = \lambda \nabla g$:

$$3y + 2z = \lambda yz$$
$$3x + 2z = \lambda xz$$
$$2x + 2y = \lambda xy$$

$$3xy + 2xz = \lambda xyz$$

$$3xy + 2yz = \lambda xyz$$

$$2xz + 2yz = \lambda xyz$$

$$2xz = 2yz$$

$$x = y$$

$$3xy = 2xz$$

$$3y = 2z$$

$$xyz = V$$

$$\Downarrow$$

$$x \cdot x \cdot \frac{3}{2} x = \frac{3}{2} x^3 = V \Rightarrow \underline{x = \sqrt[3]{\frac{2}{3} V}}$$

Overflatearealet vil bli veldig stort når en av x, y, z blir veldig liten:

$$xyz = V$$

$$\varepsilon yz = V$$

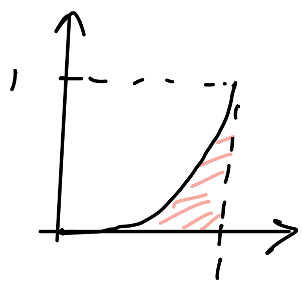
$$yz = \frac{V}{\varepsilon}$$, som blir stor.

Oppgave 8

$$\int_0^1 \int_{y^{1/3}}^1 \frac{\sin(\pi x^2)}{x^2}\,dx\,dy$$

$x = y^{\frac{1}{3}}$

$y = x^3$



$0 \le x \le 1 \qquad 0 \le y \le x^3$

Integralet kan også skrives

$$\int_0^1 \left[\int_0^{x^3} \frac{\sin(\pi x^2)}{x^2}\,dy \right] dx$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{\sin(\pi x^2)}{x^2}\, y \right]_0^{x^3} dx$$

$u = \pi x^2,\ du = 2\pi x\,dx,\quad x\,dx = \frac{1}{2\pi}\,du$

$$= \int_0^1 x \sin(\pi x^2)\,dx = \left[-\frac{1}{2\pi}\cos(\pi x^2) \right]_0^1$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\cos\pi + \frac{1}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{2\pi} = \frac{1}{\pi}.$$

Oppgave 9

$\vec{r}(t) = (2\cos t + \cos(2t),\ 2\sin t - \sin(2t))$

Viser: $\vec{r}(0) = (3,0)$

$$x'(t) = -2\sin t - 2\sin(2t) < 0 \quad \text{når } t>0, \text{ liten}$$

$$y'(t) = 2\cos t - 2\cos(2t) = 2(\cos t - \cos(2t))$$

$$> 0 \quad \text{når } t>0, \text{ liten.}$$

Med andre ord: fra $t=0$ så avtar x, og y vokser

Derfor fortsetter kurven inn i første kvadrant.

Derfor løpes kurven gjennom mot klokka:

Greens teorem:

$$P(x,y)=0, \quad Q(x,y)=x, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1$$

$$A = \oint_C x\,dy = \int_0^{2\pi} (2\cos t + \cos(2t))(2\cos t - 2\cos(2t))\,dt$$

$$= 4\int_0^{2\pi} \cos^2 t\,dt - 2\int_0^{2\pi} \cos^2(2t)\,dt$$

$$+ \int_0^{2\pi} -4\cos t\cos(2t) + 2\cos t\cos(2t)\,dt$$

Det siste integralet: $-2\int_0^{2\pi} \cos t\cos(2t)\,dt$

$$= -2\int_0^{2\pi} (1 - 2\sin^2 t)\cos t\,dt$$

$$= -2\left(\int_0^{2\pi} \cos t \, dt - 2\int_0^{2\pi} \underbrace{\sin^2 t \cos t}\, dt\right)$$

$u = \sin t$

$\downarrow$

$\frac{1}{3}\sin^3 t$

$$= 0 + 0 = 0.$$

$$4\int_0^{2\pi} \cos^2 t \, dt - 2\int_0^{2\pi} \cos^2(2t)\, dt$$

$$= 4\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(1+\cos 2t)\, dt - 2\int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(1+\cos 4t)\, dt$$

$$= 4\left[\frac{t}{2}\right]_0^{2\pi} - 2\left[\frac{t}{2}\right]_0^{2\pi} = 4\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\pi - 2\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\pi$$

$$= 4\pi - 2\pi = 2\pi$$