Quiz kap. 12

1. $S(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n-2}}{n}$

$x^2 S(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ gange med x^2

derivert

$(x^2 S(x))' = \sum_{n=2}^{\infty} x^{n-1} = x + x^2 + \cdots = \frac{x}{1-x}$

$x^2 S(x) = \cdots$ integrerer

$S(x) = \cdots$ dele med x^2.

2. Abels teorem: Summen av rekka er kontinuerlig i hele konvergensområdet:

$S(1) = \lim_{x \to 1^-} S(x) = \lim_{x \to 1^-} \ln|1+x| = \ln(1+1) = \ln 2$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n}-1\right)^n$

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{1}{n}-1\right|^n = \lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^n$$

$$= e^{-1} \quad (\text{siden } \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$$

Siden $e^{-1} \neq 0$ så divergerer rekken på grunn av divergenstesten.

4. $S(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n x^n$ deler med x

$$\frac{1}{x} S(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n x^{n-1} \quad \text{integrerer}$$

$$\int_0^x \frac{1}{t} S(t)\,dt = \sum_{n=2}^{\infty} x^n = \frac{x^2}{1-x} \quad \text{deriverer:}$$

$$\frac{1}{x} S(x) = \dots \quad \text{gange med } x.$$

$$S(x) = \dots$$

5. Konvergensområdet for $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)(n+2)}$

forholdstesten: $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\frac{x^{n+1}}{(n+2)(n+3)}}{\frac{x^n}{(n+1)(n+2)}}\right| = \left|x \frac{(n+1)(n+2)}{(n+2)(n+3)}\right|$

$\xrightarrow{n\to\infty} |x|$

Konvergerer absolutt for $|x|<1$.
divergerer for $|x|>1$.

$x=1$: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$

konvergerer

sammenligner vi med $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ser dere at rekka konvergerer (grensesammenligningstesten)

$x=-1$: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)(n+2)}$ vil også konvergeres, siden den er absolutt konvergent.

6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$

forholdstest : $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|x \frac{n}{n+1}\right| \to |x|$

Absolutt konvergens for $|x|<1$
Divergens når $|x|>1$.

$x=1$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, divergent (harmoniske rekken)

$x=-1$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$, konvergent på grunn av testen for alternerende rekker.

Konvergensområde: $[-1,1)$

7. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n+1}}{n!} = x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n}}{n!}$$

$$= x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x^3)^n}{n!} = x\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x^3)^n}{n!} - 1\right)$$

$$= x\left(e^{x^3}-1\right)$$

Konvergerer for alle x.