5.10 Lagranges multiplikatormetode

Hvordan kan vi finne maks/min for $f(x_1, \dots, x_m)$, gitt at vi også har en eller flere tilleggsbetingelser?

Vi skriver tilleggsbetingelsene på formen

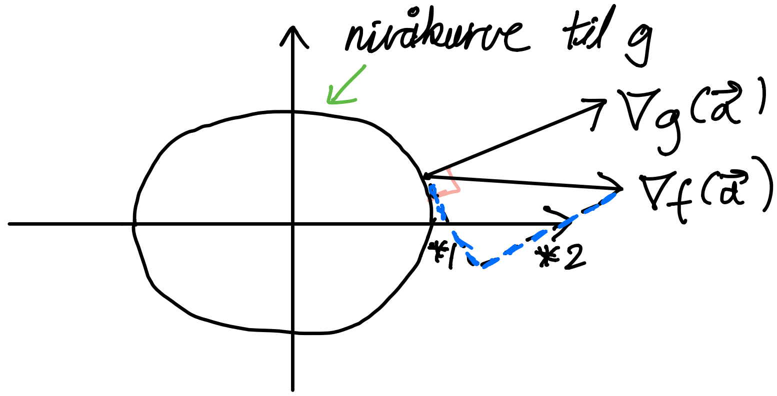
$$g(x_1, \dots, x_m) = 0$$

Teorem 5.10.2 Lagranges metode med en betingelse

Anta
- $U \subseteq \mathbb{R}^m$ åpen
- $f, g : U \to \mathbb{R}$, med kontinuerlige part.der.
- $\vec{a}$ lokalt ekstremalpunkt for f på U, under betingelsen $g(x_1, \dots, x_m) = 0$
- $\nabla g(\vec{a}) \neq \vec{0}$

Da fins et tall $\lambda \in \mathbb{R}$ slik at $\nabla f(\vec{a}) = \lambda \nabla g(\vec{a})$

Illustrasjon for $m = 2$

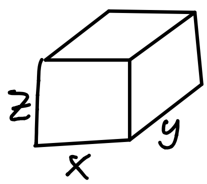


Kap. 3: $\nabla g(\vec{a})$ står vinkelrett på nivåkurven til g.
Hvis $\nabla f(\vec{a})$ ikke var parallell med $\nabla g(\vec{a})$, så har $\nabla f(\vec{a})$ en komponent som er ortogonal på $\nabla g(\vec{a})$ (*1 på tegningen)
I retningen *1 vokser f uten å bryte betingelsen.
Dette motsier at $\vec{a}$ har et lokalt ekstremalpunkt.

Metode:
1. Finn punkter der $\nabla g(\vec{a}) = \vec{0}$
2. Løs likningen $\nabla f(\vec{a}) = \lambda \nabla g(\vec{a})$
3. Sammenlig alle kandidater fra 1. og 2.

Eksempel 1. Hvordan kan vi lage en boks med volum V med minst mulig overflateareal?

Løsning: Kall sidene i boksen for $x, y,$ og z.



Funksjonen vi skal minimere er

$$f(x,y,z) = 2xy + 2xz + 2yz$$

Betingelse: $xyz = V$

$$g(x,y,z) = xyz - V$$

1. $$\nabla g(x,y,z) = \begin{pmatrix} yz \\ xz \\ xy \end{pmatrix}$$

ser at $\nabla g = \vec{0}$ kun hvis en av $x, y,$ og z er 0, men da er volumet 0, slik at betingelsen ikke er oppfylt. Ingen kandidater.

2. $$\nabla f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2y + 2z \\ 2x + 2z \\ 2x + 2y \end{pmatrix}$$

$\nabla f = \lambda \nabla g$:

$$2y + 2z = \lambda yz$$
$$2x + 2z = \lambda xz$$
$$2x + 2y = \lambda xy$$

($xyz = V$ kommer i tillegg)

gang første likning med x, andre med y, tredje med z:

$$2xy + 2xz = \lambda xyz$$
$$2xy + 2yz = \lambda xyz$$
$$2xz + 2yz = \lambda xyz$$

ser at $2xz = 2yz$ (eliminert ledd ved å ta de to første likningene)

Dette gir at $x = y$. På samme måte får vi $x = z$, slik at $x = y = z$.

Siden $xyz = V$ får vi at $\underline{\underline{x = y = z = \sqrt[3]{V}}}$

Dette er eneste kandidat til lokalt ekstremalpkt.

Randen på området U: der minst en av x, y, z er 0.

Anta at $x = \varepsilon$, og y vilkårlig. Da er $z = \frac{V}{y\varepsilon}$

overflateareal: $f(\varepsilon, y, \frac{V}{y\varepsilon}) = 2\varepsilon y + 2\varepsilon \frac{V}{y\varepsilon} + 2y\frac{V}{y\varepsilon}$

$$= 2\varepsilon y + \frac{2V}{y} + \underbrace{\frac{2V}{\varepsilon}}_{\downarrow \infty}$$

Dette forklarer at $(\sqrt[3]{V}, \sqrt[3]{V}, \sqrt[3]{V})$ faktisk er et lokalt min.

Dette kan også løses uten å tenke i bibetingelser:
substituerer $z = \frac{V}{xy}$ i $f(x,y,z)$:

$$f(x,y,z) = 2xy + 2xz + 2yz$$
$$= 2xy + \frac{2V}{x} + \frac{2V}{y}$$

$$A(x,y) = 2xy + \frac{2V}{x} + \frac{2V}{y}$$

$$\nabla A = \begin{pmatrix} 2y - \frac{2V}{x^2} \\ 2x - \frac{2V}{y^2} \end{pmatrix}$$

$$\nabla A = 0 \iff \underbrace{\underbrace{2y = \frac{2V}{x^2}\,, \quad 2x = \frac{2V}{y^2}}_{yx^2 = V = y^2 x}}_{x = y}$$

Vi får da $2x = \frac{2V}{x^2}$, slik at $x^3 = V$, slik at $x = \sqrt[3]{V}$.
Samme løsning som før.

Andrederiverttesten:

A

$$HA(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{4V}{x^3} & 2 \\ 2 & \frac{4V}{y^3} \end{pmatrix}$$

$$D = \frac{16V^2}{x^3y^3} - 4 = \frac{16V^2}{VV} - 4 = 16 - 4 = 12 > 0$$

Siden $A > 0$, slik at punktet er et lokalt min.

Eksempel 2: Finn lokale ekstremalpunkter for

$f(x,y) = x^2+y^2$ under betingelsen

$g(x,y) = \underbrace{(x-1)^2+y^2-1}_{\text{ligger på en sylinder med sentrum } (1,0)} = 0$

Løsning: 1. $\nabla g = \begin{pmatrix} 2(x-1) \\ 2y \end{pmatrix}$

Denne er $\vec{0}$ kun når $x=1$ og $y=0$, men $(1,0)$ oppfyller ikke betingelsen $g(x,y)=0$

2. $\nabla f = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$

$\nabla f = \lambda \nabla g$ gir $\begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2(x-1) \\ 2y \end{pmatrix}$

Vi har også $(x-1)^2+y^2=1$

Tre likninger: 1. $2x = 2\lambda(x-1)$

2. $2y = 2\lambda y$

3. $(x-1)^2+y^2=1$

a) $y \neq 0$: Da gir likning 2 at $\lambda = 1$.

Sett dette inn i første likning:

$$2x = 2(x-1) = 2x-2,$$

som er umulig.

b) $y=0$: Tredje likning sier da at at $(x-1)^2=1$, slik at $x=0$ eller $x=2$

$x=0$ i likning 1: $2\cdot 0 = 2\lambda(0-1) \Rightarrow \lambda = 0$

$x = 2$ i likning 2: $2 \cdot 2 = 2 \cdot \lambda(2-1) \Rightarrow \lambda = 2.$

c) $f(0,0) = 0^2 + 0^2 = 0$ min.

$f(2,0) = 2^2 + 0^2 = 4$ maks.

Disse må vare globale min/maks.

Teorem 5.10.5 Lagranges metode med flere bibetingelser

Hvis $\vec{a}$ er maks./min. for $f(x_1, \dots, x_m)$ under bibetingelsene

$$\begin{cases} g_1(x_1, \dots, x_m) = 0 \\ \vdots \\ g_k(x_1, \dots, x_m) = 0 \end{cases}$$

Så er enten

1) $\nabla g_1(\vec{a}), \dots, \nabla g_k(\vec{a})$ lineært avhengige.

eller

2) Det fins konstanter $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ slik at

$$\nabla f(\vec{a}) = \lambda_1 \nabla g_1(\vec{a}) + \dots + \lambda_k \nabla g_k(\vec{a})$$

Eksempel 3: Finne maks/min for $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$
under betingelsene
$$g_1(x,y,z) = x + y + z = 0$$
$$g_2(x,y,z) = x + y - z = 0$$

Løsning:

1. $\nabla g_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad \nabla g_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Disse er lineært uavhengige, så ingen kandidater.

2. $\nabla f = \lambda_1 \nabla g_1 + \lambda_2 \nabla g_2$:

$$\begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

i tillegg har vi: $\quad x + y + z = 0$
$\quad x + y - z = 0$

Skriver opp som et lineært system:

$$\begin{aligned}
2x \qquad\qquad & -\lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\
+2y \qquad & -\lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\
+2z & -\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\
x + y + z \quad & \qquad\qquad = 0 \\
x + y - z \quad & \qquad\qquad = 0
\end{aligned}$$

Matrisen for dette systemet er

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dette betyr at $x = y = z = \lambda_1 = \lambda_2 = 0$ er eneste løsning $\blacksquare$

Utledning av Lagranges metode med en betingelse

- Anta $\vec{a}$ lokalt ekstremalpunkt for f under betingelsen $g(x_1, \dots, x_m) = 0$.
- Anta også $\nabla g(\vec{a}) \neq \vec{0}$
- Anta $\frac{\partial g}{\partial x_m}(\vec{a}) \neq 0$ (evt. bytt om på variablene først)

Implisitt funksjonsteorem:

Det finnes en omegn U om $(a_1, \dots, a_{m-1})$ i $\mathbb{R}^{m-1}$, og en $\phi : U \to \mathbb{R}$ s.a.

$$g(x_1, \dots, x_{m-1}, \phi(x_1, \dots, x_{m-1})) = 0, \quad \text{alle } (x_1, \dots, x_{m-1}) \in U$$

$$\phi(a_1, \dots, a_{m-1}) = a_m$$

Dette gir

$$h(x_1, \dots, x_{m-1}) \overset{\text{def.}}{=} f(\underbrace{x_1, \dots, x_{m-1}, \phi(x_1, \dots, x_{m-1})}_{\vec{G}})$$

h har $(a_1, \dots, a_{m-1})$ som lokalt ekstremalpunkt uten betingelsen.

Fra seksjon 5.9 vet vi da at $\nabla h = \vec{0}$, slik at

$$\vec{0} = \left(\frac{\partial h}{\partial x_1} \ \dots \ \frac{\partial h}{\partial x_{m-1}} \right)$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \ \dots \ \frac{\partial f}{\partial x_{m-1}} \quad \frac{\partial f}{\partial x_m} \right) \underbrace{\begin{pmatrix} & I_{m-1} & \\ \frac{\partial \phi}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial \phi}{\partial x_{m-1}} \end{pmatrix}}_{\vec{G}'}$$

Dette betyr at $0 = \frac{\partial h}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\partial f}{\partial x_m} \frac{\partial \phi}{\partial x_i}$ for alle i

Dette er det samme som $\frac{\partial \phi}{\partial x_i} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}}{\frac{\partial f}{\partial x_m}}$

Fra implisitt funksjonsteorem har vi også $\frac{\partial \phi}{\partial x_i} = \frac{-\frac{\partial g}{\partial x_i}}{\frac{\partial g}{\partial x_m}}$

Vi sammenligner: $-\frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}}{\frac{\partial f}{\partial x_m}} = -\frac{\frac{\partial g}{\partial x_i}}{\frac{\partial g}{\partial x_m}}$

Skriver om $$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \underbrace{\frac{\frac{\partial f}{\partial x_m}}{\frac{\partial g}{\partial x_m}}}_{\lambda} \frac{\partial g}{\partial x_i}$$

Vi har at $\frac{\partial f}{\partial x_i} = \lambda \frac{\partial g}{\partial x_i}$ for alle i, slik at

$$\nabla f = \lambda \nabla g \quad \blacksquare$$