

Seksjon 5.11 Gradientmetoden

er en metode for å finne tilnærming til min. av $f(\vec{x})$

Husk: $-\nabla f(\vec{x})$ peker i den retningen f artar raskest.

Hvis $\vec{x}_n$ er en tilnærming til min, så definerer gradientmetoden

den nye tilnærmingen $\vec{x}_{n+1} = \vec{x}_n - t \nabla f(\vec{x}_n)$, der $t > 0$ sier noe om "hvor langt" vi skal følge gradienten fra $\vec{x}_n$:

- t for liten: kommer litt nærmere min.
- t for stor: kan gi dårlig tilnærming til min.

En mulighet for valg av t : t slik at

$f(\vec{x}_n - t \nabla f(\vec{x}_n))$ blir minst mulig. (min. på linja gjennom $\vec{x}_n$, retning = -gradient)

$$\vec{r}(t) = \vec{x}_{n+1}$$

sett $g(t) = f(\vec{r}(t))$. Kjernerregelen gir:

$$\begin{aligned} g'(t) &= \nabla f(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) \\ &= -\nabla f(\vec{r}(t)) \cdot \nabla f(\vec{x}_n) \\ &= -\nabla f(\vec{x}_{n+1}) \cdot \nabla f(\vec{x}_n) = 0 \end{aligned}$$

$g'(t) = 0$ gir at $\nabla f(\vec{x}_{n+1}) \cdot \nabla f(\vec{x}_n) = 0$, som ikke nødvendigvis har en løsning for t .

$$\nabla f(\vec{x}_n - t \nabla f(\vec{x}_n)) \cdot \nabla f(\vec{x}_n) = 0$$

Quiz kap 5. del 1

$$\begin{aligned} 5. \quad \vec{x}_n \cdot \vec{y}_n &= \left(\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \left(1 - \frac{1}{n}\right) \frac{1}{n} = \frac{2}{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 0 \cdot (1 - 0) = 0 \end{aligned}$$

$$6. \quad \left(1 + \frac{1}{n^2}, 1 - \frac{1}{n^2}\right) \rightarrow (1 + 0, 1 - 0) = (1, 1), \text{ s\aa konvergent, s\aa Cauchy.}$$

Cauchyfølge: Finnes N s.o. $|\vec{x}_n - \vec{x}_m| \leq \varepsilon$ for alle $n, m \geq N$.

Quiz kap 5 del 2

1) $\vec{F}(x, y) = (x^2 - y, x + 2y)$, med $\vec{x}_0 = (1, 1) \Rightarrow \vec{F}(1, 1) = (0, 3)$

$$\vec{F}'(x, y) = \begin{pmatrix} 2x & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \vec{F}'(1, 1) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow \\ (\vec{F}'(1, 1))^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Newtonsmetode: $\vec{x}_1 = \vec{x}_0 - (\vec{F}'(1, 1))^{-1} \vec{F}(1, 1)$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{3}{5} \\ 1 - \frac{6}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ -\frac{1}{5} \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

2) Omvendt funksjon $\vec{G}$ definert på omegn om $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$:

$$\vec{F}(i) = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{G}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = (i).$$

Vi fant $(\vec{F}(i))^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, som også er $\vec{G}'\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$.

3) $f(x, y, z) = x^4 + y^2 z^2 + z^4 - 3 = 0$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2yz^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 2y^2 z + 4z^3$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,1,1) = 4 \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1,1,1) = 2 \quad \frac{\partial f}{\partial z}(1,1,1) = 2+4 = 6 \neq 0$$

↓
kan bruke impl. funk. teorem

$$\frac{\partial g}{\partial x}(1,1) = - \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(1,1,1)}{\frac{\partial f}{\partial z}(1,1,1)} = - \frac{4}{6} = - \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial x} = - \frac{4x^3}{2y^2z + 4z^3}$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(1,1) = - \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(1,1,1)}{\frac{\partial f}{\partial z}(1,1,1)} = - \frac{2}{6} = - \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial y} = \frac{2yz^2}{2y^2z + 4z^3}$$

4) Stasjonære punkter for $f(x,y) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 2y^3 - 15y^2 + 36y$

$$\nabla f(x,y) = (6x^2 - 18x + 12, 6y^2 - 30y + 36)$$

$$6x^2 - 18x + 12 = 0 \Rightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{3 \pm 1}{2} \Rightarrow x = 2 \text{ eller } x = 1$$

$$6y^2 - 30y + 36 = 0 \Rightarrow y^2 - 5y + 6 = 0 \Rightarrow y = \frac{5 \pm 1}{2} \Rightarrow y = 3 \text{ eller } y = 2$$

stasjonære punkter: $(1,2), (1,3), (2,2), (2,3)$

5) $Hf(x,y) :$ $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x - 18$ $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$ $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12y - 30$

$$Hf\left(\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 12x-18 & 0 \\ 0 & 12y-30 \end{pmatrix}$$

6) $Hf\left(\begin{smallmatrix} 2 \\ 2 \end{smallmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$, egenverdier 6, -6.
annenderiverttesten: sadelpunkt.

7) Lagranges metode: $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$

$$g(x,y,z) = (x-2)^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$$

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} \quad \nabla g = \begin{pmatrix} 2(x-2) \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} = \vec{0} \text{ kun n r } x=2, y=0, z=0, \\ \text{som ikke tilfredsstiller } g(x,y,z)=0 :$$

$$g(2,0,0) = 0^2 + 0^2 + 0^2 - 1 = -1 \neq 0$$

så ingen kandidater for $\nabla g = 0$

$$\begin{aligned}\nabla f &= \lambda \nabla g : & 2x &= 2\lambda(x-2) \\ & & 2y &= 2\lambda y \\ & & 2z &= 2\lambda z\end{aligned}$$

Likning 3: enten $z=0$
 $z \neq 0$: Da er $\lambda=1$. Sett inn i Likning 1: $2x = 2x - 4$
 $0 = -4$, umulig.

Likning 2: enten $y=0$
 $y \neq 0$: Da er $\lambda=1$. Likning 1 gir $2x = 2x - 4$, umulig.

Derfor er $y=z=0$: $(x-2)^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ gir da at $(x-2)^2 = 1$
 $\Rightarrow x=1$ eller $x=3$.

$$\nabla f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \nabla g\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2(x-2) \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\lambda = -1)$$

$$\nabla f\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \nabla g\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\lambda = 3)$$

$$\left. \begin{aligned} f(1,0,0) &= 1^2 + 0^2 + 0^2 = 1, \text{ som er min} \\ f(3,0,0) &= 3^2 + 0^2 + 0^2 = 9, \text{ som er maks.} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Vi har et lukket og} \\ \text{begrenset område} \\ g(x,y,z) = 0 \end{array}$$

Seksjon 12.1 : Kalkulus, konvergens av rekker

- En rekke er en uendelig sum av tall: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$
- $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ kalles en delsum av rekken
- Vi sier at rekken konvergerer hvis $\{S_n\}$ konvergerer, d.v.s. $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 + \dots + a_n)$ eksisterer
- Vi sier at rekken divergerer hvis den ikke konvergerer




