

Seksjon 12.1 i Kalkulus forts.

Eksempel 1: Finn ut om rekke $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1000}\right)^n$ konvergerer.

Løsning: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1000}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1+\frac{1000}{n}}\right)^n = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1+\frac{1000}{n}\right)^n} = \frac{1}{e^{1000}}$

Vi bruker at $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$ $= e^{-1000} \neq 0$

På grunn av divergenstesten: Rekke divergerer

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^{\ln \left(1+\frac{x}{n}\right)^n} = e^{n \ln \left(1+\frac{x}{n}\right)}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \left(1+\frac{x}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = \lim_{\substack{y=\frac{1}{n} \\ y \rightarrow 0}} \frac{\ln(1+xy)}{y}$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\frac{x}{1+xy}}{1} = x$$

Eksempel 2: $\sum_{n=0}^{\infty} 5 \left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{5}{1-\frac{2}{3}} = \frac{5}{\frac{1}{3}} = \underline{\underline{15}}$

Eksempel 3: La x være en variabel, og se på rekke

$$x^2 - x^4 + x^6 - x^8 + \dots$$

Denne er geometrisk med $a = x^2$, og $r = -x^2$,
og denne konvergerer når $|x^2| < 1 \Leftrightarrow |x| < 1$

Summen blir $\frac{a}{1-r} = \frac{x^2}{1-(-x^2)} = \frac{x^2+1-1}{1+x^2} = \underline{\underline{1 - \frac{1}{1+x^2}}}$

Eksempel 4: Konvergerer rekke $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$?

Løsning: Splitt opp summen: tom. $a_{2^0} : 1$

tom. $a_{2^1} : \frac{1}{2}$

tom. $a_{2^2} : \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$

tom. $a_{2^3} : \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}$

$$\text{tom. } a_{2^k} : \underbrace{\frac{1}{2^{k-1}+1} + \dots + \frac{1}{2^k}}_{2^{k-1} \text{ ledd, alle } \geq \frac{1}{2^k}}$$

$$\text{sum ledd } a_{2^k} : \geq 2^{k-1} \cdot \frac{1}{2^k} = 2^{-1} = \frac{1}{2}.$$

Siden hver linje er $\geq \frac{1}{2}$, og vi har uendelig mange linjer, så må rekka divergere.

Regneregler for rekker:

Anta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ og $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergerer.

Da konvergerer også $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$, og

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

Hvis c er et tall så vil også $\sum_{n=1}^{\infty} c a_n$ konvergere, og

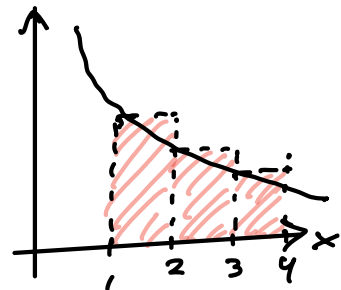
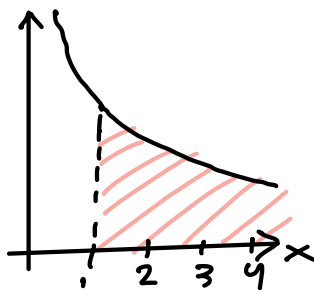
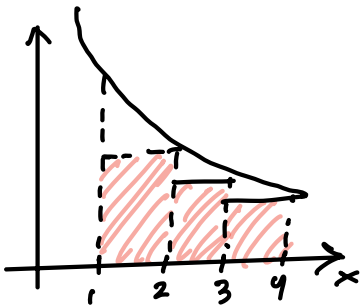
$$\sum_{n=1}^{\infty} c a_n = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Seksjon 12.2 konvergenstester for rekker med positive ledd

Integral testen Anta $f: [1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ er positiv, kont., avtagende.

Da har vi at $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ konvergerer $\Leftrightarrow \int_1^{\infty} f(x) dx$ konvergerer

Bevis:



Ser fra skraverte arealer:

$$\sum_{k=2}^n f(k) \leq \int_1^n f(x) dx \leq \sum_{k=1}^n f(k)$$

Hvis $\int_1^{\infty} f(x) dx$ konvergerer så er $\sum_{k=2}^n f(k)$ oppad begrenset, og voksende. Så konvergent

Hvis $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ konvergerer, så er $\int_1^n f(x) dx$ oppad begrenset og voksende, så konvergerer $\blacksquare$

Eksempel 4 igjen, men nå med integraltesten: $f(x) = \frac{1}{x}$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n \frac{1}{x} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} [\ln x]_1^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln n = \infty \Rightarrow \text{divergent.}$$

Derfor er også rekka $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergent.

Setning 12.2.4: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ konvergerer $\Leftrightarrow p > 1$

Beweis:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n \frac{1}{x^p} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{-p+1} x^{-p+1} \right]_1^n$$
$$= \frac{1}{-p+1} \lim_{n \rightarrow \infty} (n^{-p+1} - 1)$$

$-p+1 > 0$ (dvs når $p < 1$) divergerer

$-p+1 < 0$ (dvs når $p > 1$) konvergerer $\blacksquare$

Sammenligningstesten

Anta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ og $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ er positive rekker

(i) Hvis $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerer, og $b_n \leq c a_n$ for alle n , og $c > 0$, da konvergerer også $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$

(ii) Hvis $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergerer, og $b_n \geq d a_n$ for alle n , og $d > 0$, da divergerer også $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$

Beweis (i): Siden $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent, så er også $\sum_{n=1}^{\infty} c a_n$ konvergent, og

$$\sum_{n=1}^N b_n \leq \sum_{n=1}^N c a_n \rightarrow M$$

Dermed er $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ oppad begrenset, voksende, og derfor konvergent $\blacksquare$

Eksempel 5: Konvergerer rekka $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-1}{2n^4+2}$?

Løsning: Vi har at
$$\left. \begin{array}{l} n^2-1 \leq n^2 \\ 2n^4+2 \geq 2n^4 \end{array} \right\} \frac{n^2-1}{2n^4+2} \leq \frac{n^2}{2n^4} = \underbrace{\frac{1}{2}}_c \underbrace{\frac{1}{n^2}}_{a_n}$$

Vi har altså $b_n \leq c a_n$, der $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, som konvergerer.
setn 12.2.4

Det følger fra (i) i sammenligningstesten at rekka konvergerer.

Grensesammenligningstesten

Anta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ og $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ er positive rekker

(i) Hvis $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergerer og $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} < \infty$,
så konvergerer også $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$

(ii) Hvis $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergerer, og $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} > 0$,
så divergerer også $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$

Bevis (i): Anta $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n} = M < \infty$. Da er $\frac{b_n}{a_n} < M+1$ for alle store nok n .

Men da er $b_n < (M+1)a_n$. Det følger fra sammenligningstesten (i) at rekka konvergerer.

Eksempel 5 igjen Vi sammenligner $b_n = \frac{n^2-1}{2n^4+2}$ med $a_n = \frac{1}{n^2}$:

$$\frac{b_n}{a_n} = \frac{\frac{n^2-1}{2n^4+2}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{n^4-n^2}{2n^4+2} = \frac{1-\frac{1}{n^2}}{2+\frac{2}{n^4}} \rightarrow \frac{1}{2} \text{ når } n \rightarrow \infty.$$

Siden $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergerer, så følger det fra grensesammenligningstesten at $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-1}{2n^4+2}$ også konvergerer.

Forholdstesten: La $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ være en positiv rekke, og anta at

$a = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ eksisterer. Da har vi at

(i): $a < 1$: Rekka konvergerer

(ii): $a > 1$: Rekka divergerer

(iii): $a = 1$: Ingen konklusjon

Beris (i): Anta $a < 1$. Velg r s.a. $a < r < 1$

Det finnes en N s.a. $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq r$ for alle $n \geq N$

Da er $a_{n+1} \leq r a_n$

$$\begin{aligned} a_{n+2} &\leq r a_{n+1} \leq r^2 a_n \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$a_{n+k} \leq \dots \leq r^k a_n$$

Definer rekka b_n ved at $b_{k+n} = r^k a_n$ ($n \geq 1, k \geq 0$).
 $\sum b_n$ er konvergent (geometrisk rekke med $r < 1$).

Siden $a_{n+k} \leq b_{n+k}$: a_n er også konvergent pga. sammenligningstesten.

(ii): Anta $a > 1$: Da er $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ for n stor nok.

Men da kan ikke leddene gå mot 0, og divergenstesten sier at rekka divergerer.

Eksempel 6 Hva blir $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{100}}{n!}$?

Løsning:

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{\frac{(n+1)^{100}}{(n+1)!}}{\frac{n^{100}}{n!}} = \frac{n! (n+1)^{100}}{(n+1)! n^{100}} = \frac{1}{n+1} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{100} \\ &= \frac{1}{n+1} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{100} \rightarrow 0 = a \end{aligned}$$

Siden $a = 0$ konvergerer rekka.

Eksempel 7 Hva blir $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ for en gitt x ?

Løsning: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}} = \frac{1}{(n+1)} x \rightarrow 0 = a \quad (\text{uansett } x)$

Rekka konvergerer for alle x .

(Dette er også Taylorrekka til e^x)

Rottesten La $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ være en positiv rekke, og anta $a = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$ eksisterer. Da gjelder

(i) : $a < 1$: Rekka konvergerer

(ii) : $a > 1$: Rekka divergerer

(iii) : $a = 1$: Ingen konklusjon

Beweis (i): La $a < r < 1$. Det finnes en N så $\sqrt[n]{a_n} < r$ for alle $n \geq N$.

Men da er $a_n < r^n$ for alle $n \geq N$

Sammenlign nå med den geometriske rekka $b_n = r^n$, som konvergerer.

(ii): Da må $a_n \not\rightarrow 0$ for alle n store nok.

Divergenstesten sier da at rekka divergerer.

Eksempel 8 Avgjør om rekka $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{1}{n})^{n^2}$ konvergerer

Løsning: $\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{(1 - \frac{1}{n})^{n^2}} = ((1 - \frac{1}{n})^{n^2})^{\frac{1}{n}} = (1 - \frac{1}{n})^{n \cdot \frac{1}{n}} = (1 - \frac{1}{n})^1$

$(1 + \frac{x}{n})^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^x$ $\downarrow$
 $e^{-1} < 1$

Derfor vil rekka konvergere