

Seksjon 12.3 Alternierende rekker

Alternierende betyr at to påfølgende ledd i rekke alltid har motsatt fortegn

Test for alternierende rekker:

Hvis rekke $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er alternierende, $a_n \rightarrow 0$, og $|a_n|$ er avtagende

Da har vi

1) Rekke konvergerer. Skriv $s = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ for sammen, $s_n = \sum_{k=1}^n a_k$

2) $|s - s_n| \leq |a_{n+1}|$ (estimat på feilen ved å bare ta med n ledd)

Bevis: Anta $a_1 > 0$

$$s_{2n} = (a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) + \dots + (a_{2n-1} + a_{2n}) \quad \left. \begin{array}{l} \geq 0 \\ \geq 0 \\ \geq 0 \end{array} \right\} \text{ voksende}$$

$$= a_1 + (a_2 + a_3) + \dots + (a_{2n-2} + a_{2n-1}) + a_{2n} \quad \left. \begin{array}{l} \leq 0 \\ \leq 0 \\ \leq 0 \end{array} \right\} \text{ oppad begrenset } \text{ av } a_1$$

$$s_{2n+1} = a_1 + (a_2 + a_3) + \dots + (a_{2n} + a_{2n+1}) \quad \left. \begin{array}{l} \leq 0 \\ \leq 0 \end{array} \right\} \text{ avtagende}$$

$$= (a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) + \dots + (a_{2n-1} + a_{2n}) + a_{2n+1} \quad \left. \begin{array}{l} \geq 0 \\ \geq 0 \\ \geq 0 \end{array} \right\} \text{ nedad begr. av } 0$$

s_{2n} voksende, oppad begrenset $\Rightarrow s_{2n}$ konvergerer mot et tall S

s_{2n+1} avtagende, nedad begrenset $\Rightarrow s_{2n+1}$ konvergerer mot et tall T

$$T - S = \lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n+1} - \lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (s_{2n+1} - s_{2n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = 0$$

Derfor er $T = S$, og rekke konvergerer.

$$\begin{array}{ccc} & a_{2n+1} & \\ & \swarrow \quad \searrow & \\ s - s_{2n} & & s_{2n+1} \\ \swarrow \quad \searrow & & \\ s_{2n} & s = S = T & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} & -a_{2n} & \\ & \swarrow \quad \searrow & \\ s_{2n-1} - s & & s_{2n-1} \\ \swarrow \quad \searrow & & \\ s_{2n} & s = S = T & \end{array}$$

ser at $|s - s_{2n}| \leq |a_{2n+1}|$

ser at $|s - s_{2n-1}| \leq |a_{2n}|$

Derfor er $|s - s_n| \leq |a_{n+1}|$ for alle n , siden gjelder for alle partall og oddetall

Eksempel 1 a) Konvergerer rekka $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$?

Løsning: Rekka er alternerende, $a_n \rightarrow 0$, og $|a_n|$ artagende.
Test for alternerende rekker: Rekka konvergerer.

b) Hvor mange ledd må med for å få feil ≤ 0.2 ?

Løsning: Vi må velge n s.a. $|a_{n+1}| \leq 0.2$

$$\frac{1}{n+1} \leq 0.2$$

$$5 \leq n+1$$

$$n \geq 4$$

Derfor: $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{12 - 6 + 4 - 3}{12} = \frac{7}{12} \approx 0.5833$
avviker fra summen med ≤ 0.2

Seksjon 12.8 vil regne ut summen eksakt til ≈ 0.6931

Seksjon 12.4 Absolutt og betinget konvergens

Rekka $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ses å konvergere absolutt hvis $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergerer

En konvergent rekke som ikke er absolutt konvergent kalles
betinget konvergent (feks. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$)

Setning 12.4.2 En absolutt konvergent rekke er alltid konvergent.

Beweis: Anta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er absolutt konvergent. Definér to nye rekker:

$$a_n^+ = \begin{cases} a_n & \text{hvis } a_n > 0 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

$$a_n^- = \begin{cases} -a_n & \text{hvis } a_n < 0 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

begge er positive rekker

Siden $0 \leq a_n^+ \leq |a_n|$ og $0 \leq a_n^- \leq |a_n|$ så konvergerer $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ og $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$
(pga sammenligningstesten for positive rekker)

Siden $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^+ - a_n^-) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$, som konvergerer

Setning 12.4.5 (Forholdstesten igjen)

Anta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er en rekke s.a. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = a$ eksisterer. Da gjelder

- 1) $a < 1$: Rekka konvergerer absolutt
- 2) $a > 1$: Rekka divergerer
- 3) $a = 1$: Ingen konklusjon

Setning 12.4.6 (Rottesten igjen)

Anta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ er en rekke s.a. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = a$ eksisterer. Da gjelder

- 1) $a < 1$: Rekka konvergerer absolutt
- 2) $a > 1$: Rekka divergerer
- 3) $a = 1$: Ingen konklusjon

Bevisene bruker forholdstesten/rottesten for positive rekker på $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Eksempel: Konvergerer $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - 1\right)^{n^2}$?

Løsning: $\sqrt[n]{|a_n|} = \left| \left(\frac{1}{n} - 1\right)^{n^2} \right|^{\frac{1}{n}} = \left(\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2} \right)^{\frac{1}{n}} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$

$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \rightarrow e^x \rightarrow e^{-1} < 1$

Derfor konvergerer rekka absolutt.

Seksjon 12.6

Rekker på formen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ kalles potensrekker

Teorem 12.6.1 Vi har tre muligheter:

(i): Rekka konvergerer absolutt for alle x

(ii): Rekka konvergerer bare for $x = a$

(iii): Det fins en $R > 0$ s.a. rekka

1) konvergerer absolutt for $|x-a| < R$

2) divergerer når $|x-a| > R$

For $|x-a| = R$ kan alt skje (konvergens/divergens), så dette må sjekkes spesielt. R kalles konvergensradius til rekka

Merk: (i) kan uttrykkes som $R = \infty$, (ii) som $R = 0$

Eksempel Når konvergerer rekka $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n} (x-2)^n$?

Løsning: $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{\frac{(n+1)^2}{3^{n+1}} (x-2)^{n+1}}{\frac{n^2}{3^n} (x-2)^n} \right| = \left| \left(\frac{n+1}{n} \right)^2 \frac{1}{3} (x-2) \right| \rightarrow \frac{|x-2|}{3}$

Forholdstesten: Rekka konvergerer absolutt når $\frac{|x-2|}{3} < 1$

$$\Downarrow \\ |x-2| < 3$$

$$\Downarrow \\ x \in (-1, 5)$$

divergerer når $\frac{|x-2|}{3} > 1$

$$\Downarrow \\ x < -1 \text{ eller } x > 5.$$

Siden $\frac{|x-2|}{3} < 1 \Leftrightarrow |x-2| < 3$, så er $R = 3$, $a = 2$

Sjekk spesielt $|x-2| = 3$:

$$\left. \begin{array}{l} x = -1 \\ x = 5 \end{array} \right\} \Rightarrow |a_n| = \left\{ \begin{array}{l} \frac{n^2}{3^n} |(-1-2)^n| \\ \frac{n^2}{3^n} |(5-2)^n| \end{array} \right\} = \frac{n^2}{3^n} 3^n = n^2$$

Divergenstesten sier at rekka divergerer ($a_n \not\rightarrow 0$)
konvergensintervall er $(-1, 5)$

Triks for å finne summen av en potensrekke

1) Gang rekka med x , eller x^2 , eller $x^3, \dots$, for å gjøre rekka mer lik en rekke du kjenner igjen.

2) Substituer $u = x^2$, eller $u = x^3$, slik at rekka blir mer lik en kjent rekke.

3) Deriver eller integrer rekka leddvis.

Setning 12.7.1 / 12.7.3

Hvis $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ har konvergensradius R , så er

1) f er deriverbar i $(a-R, a+R)$, og $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n(x-a)^{n-1}$
$$= \sum_{u=0}^{\infty} a_{u+1}(u+1)(x-a)^u$$

2) for $x \in (a-R, a+R)$ har vi at

$$\int_a^x f(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x-a)^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{n-1}}{n} (x-a)^n$$

Eksempel Hvis $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^3}$, hva blir $f'(x)$ og $\int_0^x f(t) dt$

Løsning: Ledvis derivasjon: $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3} x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)^2}$

Ledvis integrasjon: $\int_0^x f(t) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)n^3} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n(n-1)^3}$

Eksempel Hva blir $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$?

Løsning: $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} \frac{|x|^{n+1}}{|x|^n} = \frac{n}{n+1} |x| \rightarrow |x|$

konvergensradius: $R=1$

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$$

$$\begin{aligned} S'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n x^{n-1}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} x^{n-1} \\ &= 1 - x + x^2 - x^3 + \dots = \frac{1}{1 - (-x)} \\ &= \frac{1}{1+x} \end{aligned}$$

integrerer:

bestemt:

$$\int_0^x S'(t) dt = \int_0^x \frac{1}{1+t} dt$$

$$S(x) - S(0) = \left[\ln(1+t) \right]_0^x$$

u bestemt:

$$S(x) = \int \frac{1}{1+x} dx + C$$

$$= \ln|1+x| + C$$

$$x=0: 0 = \ln 1 + C \Rightarrow C=0$$

$$S(x) = \ln(1+x)$$

$$S(x) = \ln(1+x).$$

sjekker spesielt $x = -1$: For rekke $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, divergent

$x = 1$: For rekke $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$, alternerende, konvergent.

Konvergensintervall: $(-1, 1]$

Hva blir summen for $x=1$?

Teorem 12.6.9 (Abels teorem): $S(x)$ er kontinuerlig på hele

konvergensområdet

Derfor: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = S(1) = \lim_{x \rightarrow 1} S(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \ln(1+x) = \underline{\underline{\ln 2}}$

$$\approx 0.6931$$