

Fra sist: Potensrekker kan deriveres og integreres leddvis.

Abels teorem: Summen av en potensrekke er kontinuert i hele konvergensområdet.

Eksempel: Hva blir $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$?

Løsning: Forholdstesten gir $\left(\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{n+1}{n}x\right| \rightarrow |x|\right) \Rightarrow R=1$

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^n$$

$$\frac{S(x)}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$$

integrerer: $\int_0^x \frac{S(t)}{t} dt = \sum_{n=1}^{\infty} x^n = x + x^2 + \dots = \frac{x - 1 + 1}{1-x} = -1 + \frac{1}{1-x}$

deriver: $\frac{S(x)}{x} = \frac{1}{(1-x)^2}$

$$S(x) = \frac{x}{(1-x)^2}$$

Setning 12.8.3 Anta at $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ konvergerer i $(a-R, a+R)$,

og sett $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$. Da er

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ Taylorrekke til f , det vil si at f er uendelig mange ganger deriverbar, og

$$a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}, \quad n \geq 0$$

Beris: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n \Rightarrow f(a) = a_0$, så stemmer for $n=0$.

deriver leddvis: $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n(x-a)^{n-1} \Rightarrow f'(a) = a_1$, så stemmer for $n=1$.

$\frac{f'(a)}{1!}$

deriver k ganger: $f^{(k)}(x) = \sum_n a_n k(k-1) \dots 2 \cdot 1 \cdot (x-a)^{n-k}$
 kun ledd $n=k$ bidrar

$$f^{(k)}(a) = a_k k! \quad \Leftrightarrow \quad \frac{f^{(k)}(a)}{k!} = a_k \quad \text{så stemmer for } n=k.$$

Noen kjente Taylorrekker:

1) $e^x: \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (\text{for alle } x)$

2) $\cos x: \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \quad (\text{for alle } x)$

3) $\sin x: \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (\text{for alle } x)$

4) $\frac{1}{1-x}: \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad (x \in (-1, 1))$

5) $\ln(1+x): \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n} \quad (x \in (-1, 1])$

Bevis: 5) følger fra 4) ved beddvis integrasjon:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \Rightarrow -\ln(1-x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

$$\overset{x \rightarrow -x}{-\ln(1+x)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}, \text{ som er 4}$$

2) $f(x) = \cos x$

$$f^{(4k)}(x) = \cos x$$

$$f^{(4k)}(0) = 1$$

$$1 + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^8}{8!} + \dots$$

$$f^{(4k+1)}(x) = -\sin x$$

$$f^{(4k+1)}(0) = 0$$

$$f^{(4k+2)}(x) = -\cos x$$

$$f^{(4k+2)}(0) = -1$$

$$- \frac{x^2}{2!} - \frac{x^6}{6!} - \dots$$

$$f^{(4k+3)}(x) = \sin x$$

$$f^{(4k+3)}(0) = 0$$

$$|f^{(n+1)}(c)| = \left| \begin{pmatrix} \pm \cos \\ \pm \sin \end{pmatrix}(c) \right| \leq 1$$

$$|restledd| = \left| \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x^{n+1} \right| \leq \left| \frac{x^n}{(n+1)!} \right| \rightarrow 0 \text{ når } n \rightarrow \infty, \text{ uansett } x.$$

Eksempel : Hva blir $S(x) = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{x^n}{n(n-1)(n-2)}$?

Løsning: $S'(x) = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)(n-2)}, S''(x) = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{x^{n-2}}{n-2}, S'''(x) = \sum_{n=3}^{\infty} x^{n-3}$

Vi integrerer $S'''(x) = \frac{1}{1-x}$ fra 0 til x $\frac{1}{1-x}$

$$S''(x) - \underbrace{S''(0)}_0 = -\ln(1-x)$$

$$S''(x) = -\ln(1-x)$$

Integrer igjen: $S'(x) - \underbrace{S'(0)}_0 = \left[-t \ln(1-t) \right]_0^x - \int_0^x \frac{t \cdot (-1)}{1-t} dt$

$$\begin{aligned} S'(x) &= -x \ln(1-x) - \int_0^x \left(-1 + \frac{1}{1-t} \right) dt \\ &= -x \ln(1-x) + \int_0^x 1 \cdot dt - \int_0^x \frac{1}{1-t} dt \end{aligned}$$

$$= -x \ln(1-x) + x + \ln(1-x)$$

$$= (1-x) \ln(1-x) + x$$

$$\begin{aligned} \int x \ln x dx &= \frac{1}{2} x^2 \ln x - \int \frac{1}{2} x dx \\ &= \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{4} x^2 \end{aligned}$$

Integrer igjen: $S(x) - \underbrace{S(0)}_0 = -\frac{1}{2} (1-x)^2 \ln(1-x) + \frac{1}{4} (1-x)^2 + \frac{1}{2} x^2$

Vi har sett: Vi kan finne summen av en rekke uten variabel ved å se på den som et spesialtilfelle av en rekke med variabel:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n}_{\ln(1+x) \rightarrow \ln 2 \text{ når } x \rightarrow 1} \quad \text{innsatt } x=1$$

Abels teorem: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$.

Eksempel: Hva blir $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1) 3^{2n+2}}$?

Løsning: Sett $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$. Da er: $S\left(\frac{1}{3}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{2n+1}}{2n+1}$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1) 3^{2n+1}}$$

$$= 3 \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1) 3^{2n+2}}}_{\text{vi finne}}$$

Vi deriverer: $S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{2n} = \frac{x^2 - 1 + 1}{1 - x^2} = -1 + \frac{1}{1-x^2}$

$$= -1 + \frac{1}{(1+x)(1-x)} = -1 + \underbrace{\frac{A}{1+x} + \frac{B}{1-x}}_{\frac{A(1-x) + B(1+x)}{(1+x)(1-x)}} = \frac{A+B + (B-A)x}{1-x^2}$$

$$\Downarrow \quad A=B=\frac{1}{2}$$

$$= -1 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} \right)$$

$$S(x) - \underbrace{S(0)}_0 =$$

$$\left[-x - \frac{1}{2} \ln(1-x) + \frac{1}{2} \ln(1+x) \right]_0^x$$

$$S(x) =$$

$$-x - \frac{1}{2} \ln(1-x) + \frac{1}{2} \ln(1+x)$$

$$= -x + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)$$

$$x = \frac{1}{3}$$

$$S\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} \right) = -\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\frac{4}{3}}{\frac{2}{3}} \right)$$

Vi hadde

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)3^{2n+2}} = \frac{1}{3} S\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{9} + \frac{1}{6} \ln 2$$

$$= -\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \ln 2$$

Lemma som trengs for å utlede resultat om leddets derivasjon/integrasjon:

Lemma 12.6.7: Hvis $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konvergerer for $x=b$, $b \neq 0$, så konvergerer rekke absolutt for alle x s.o. $|x| < |b|$.
 Konvergensen er uniform på $[-c, c]$ når $0 < c < |b|$ def. mengde
 ($\{f_n\}$ sies å konvergere uniformt mot f på A hvis
 $\sup_{x \in A} \sum |f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0$ når $n \rightarrow \infty$. se sek. 11.3 kalk.

Beris: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b^n$ konvergerer $\Rightarrow a_n b^n \rightarrow 0$

Det finnes da et tall K s.o. $|a_n b^n| < K$ for alle n .

Anta c er slik at $0 < c < |b|$. For $x \in [-c, c]$ får vi

$$|a_n x^n| = |a_n b^n| / \frac{|x|^n}{|b|^n} \leq K \left| \frac{x}{b} \right|^n \leq K \underbrace{\left| \frac{c}{b} \right|^n}_{< 1}$$

leddene i en konvergent geometrisk rekke.

Sammenligningstesten: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konvergerer absolutt

setning 12.5.1 i boka er Weierstrass M-test, og denne gir at $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konvergerer uniformt.

Basis for leddvis integrasjon i boka bruker dette:

$$\text{Sett } f_N(x) = \sum_{n=0}^N a_n x^n, \quad |x| < R$$

pga. lemma 12.6.7: f_N konvergerer uniformt. Kall grensen f .

$$\text{Frasetning 11.4.1: } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^x f_N(t) dt = \int_0^x f(t) dt$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{n-1}}{n} x^n$$