

UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Deleksamen i MAT1110 — Kalkulus og Lineær algebra

Eksamensdag: Prøveeksamen V2026.

Oppgavesettet er på 8 sider.

Vedlegg: Formelark

Tillatte hjelpemidler: Ingen.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Svarene føres i Inspira.

Eksamen består av 15 oppgaver og alle oppgavene teller likt. Midtveiseksamen bidrar med $1/3$ av den endelige karakteren i emnet. Det er bare ett riktig alternativ på hver oppgave. Dersom du svarer feil eller lar være å svare på en oppgave, får du 0 poeng på den oppgaven. Du blir altså ikke "straffet" for å gjette". *Lykke til!*

Oppgaver

Oppgave 1. Vektorproduktet av de to vektorene $\mathbf{a} = (1, 0, 2)$ og $\mathbf{b} = (2, 2, 1)$ er

✓ **A:** $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (-4, 3, 2)$

B: $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (2, 3, 4)$

C: $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (-4, -3, -2)$

D: $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (4, -3, -2)$

E: $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (-4, -3, 2)$

Oppgave 2. La $\mathbf{F}$ være affinavbildningen

$$\mathbf{F}(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

og la R være rektanglet der $1 \leq x \leq 3$, $2 \leq y \leq 4$. Da vil arealet til parallellogrammet $\mathbf{F}(R)$ være

✓ **A:** 100

B: 50

C: 25

D: $25\sqrt{2}$

E: 75

Løsning: Vi har at $\det A = 1 + 24 = 25$, som da er forstørrelsesfaktoren for arealer. Siden R har areal 4 så vil parallellogrammet $\mathbf{F}(R)$ ha areal $4 \cdot 25 = 100$.

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 3. La $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ være en avbildning slik at $\mathbf{F}'(2, 0, -1) = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. La også $\mathbf{G} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ være en avbildning slik at $\mathbf{G}(2, 0) =$

$(2, 0, -1)$ og $\mathbf{G}'(2, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. Da blir Jacobimatrisen i punktet $(2, 0)$ til den sammensatte funksjonen $\mathbf{H}(x, y) = \mathbf{F}(\mathbf{G}(x, y))$

✓ **A:** $\begin{pmatrix} 13 & 18 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$

B: $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 4 & 16 & -2 \\ 6 & 16 & 1 \end{pmatrix}$

C: $\begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

D: $\begin{pmatrix} 1 & 8 & -1 \\ 1 & 4 & -3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

E: $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$

Løsning: Kjergeregelen sier at $\mathbf{H}'(x, y) = \mathbf{F}'(\mathbf{G}(x, y))\mathbf{G}'(x, y)$. Siden $\mathbf{G}(2, 0) = (2, 0, -1)$ får vi spesielt

$$\mathbf{H}'(2, 0) = \mathbf{F}'(2, 0, -1)\mathbf{G}'(2, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 18 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Oppgave 4. Lengden til kurven

$$\mathbf{r}(t) = \left(\frac{1}{t}, 2t, \frac{2}{3}t^3 \right), \quad 1 \leq t \leq 2.$$

er

A: $\sqrt{3}$

B: $\sqrt{2}/2$

✓ **C:** $31/6$

D: $2/5$

E: 1

Løsning: Vi har at

$$\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} = \sqrt{1/t^4 + 4 + 4t^4} = \sqrt{(1/t^2 + 2t^2)^2} = 1/t^2 + 2t^2,$$

slik at buelengden blir

$$\int_1^2 (1/t^2 + 2t^2) dt = [-1/t + 2t^3/3]_1^2 = -1/2 + 16/3 + 1 - 2/3 = 14/3 + 1/2 = 31/6.$$

Oppgave 5. En parametrisert kurve er gitt ved

$$\mathbf{r}(t) = \cos t \mathbf{i} + \sin t \mathbf{j} + t^2 \mathbf{k}.$$

Baneakselerasjonen $a(t)$ er da

(Fortsettes på side 3.)

A: 1

B: $-\sin t \mathbf{i} + \cos t \mathbf{j} + 2t \mathbf{k}$

C: $-\cos t \mathbf{i} - \sin t \mathbf{j} + 2 \mathbf{k}$

D: $\sqrt{1 + 4t^2}$

✓E: $4t/\sqrt{1 + 4t^2}$

Løsning: Vi har at

$$v(t) = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2(t) + 4t^2} = \sqrt{4t^2 + 1}.$$

Dette gir at

$$a(t) = v'(t) = \frac{8t}{2\sqrt{4t^2 + 1}} = \frac{4t}{\sqrt{4t^2 + 1}}$$

(Fortsettes på side 4.)

Oppgave 6. Vi har gitt vektorfeltet

$$\mathbf{F}(x, y, z) = yz \mathbf{i} + xz \mathbf{j} + xy \mathbf{k}.$$

Hvis kurven $\mathcal{C}$ er parametrisert ved

$$\mathbf{r}(t) = \cos t \mathbf{i} + \sin t \mathbf{j} + t^2 \mathbf{k}, \quad \pi/4 \leq t \leq 9\pi/4,$$

så blir $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$

A: $1 + \pi$

B: π

✓ **C:** $5\pi^2/2$

D: 0

E: 3

Løsning: Vi har at

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = t^2 \sin t \mathbf{i} + t^2 \cos t \mathbf{j} + \cos t \sin t \mathbf{k}'(t) = -\sin t \mathbf{i} + \cos t \mathbf{j} + 2t \mathbf{k}$$

slik at

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) = -t^2 \sin^2 t + t^2 \cos^2 t + 2t \sin t \cos t = t^2 \cos(2t) + t \sin(2t).$$

Vi må nå bruke delvis integrasjon

$$\begin{aligned} \int_{\pi/4}^{9\pi/4} t \sin(2t) dt &= \left[-\frac{1}{2} t \cos(2t) \right]_{\pi/4}^{9\pi/4} + \frac{1}{2} \int_{\pi/4}^{9\pi/4} \cos(2t) dt = 0 \\ \int_{\pi/4}^{9\pi/4} t^2 \cos(2t) dt &= \left[\frac{1}{2} t^2 \sin(2t) \right]_{\pi/4}^{9\pi/4} - \int_{\pi/4}^{9\pi/4} t \sin(2t) dt = \frac{5}{2} \pi^2, \end{aligned}$$

slik at $\int_{\pi/4}^{9\pi/4} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt = \frac{5}{2} \pi^2$.

Det er enklere å se dette ved å observere at feltet er konservativt med potensialfunksjon $\phi(x, y, z) = xyz$. Siden kurven starter i punktet $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, \pi^2/16)$ og ender opp i punktet $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, 81\pi^2/16)$ så bli integralet

$$\phi(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, 81\pi^2/16) - \phi(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, \pi^2/16) = \frac{1}{2} 80\pi^2/16 = 5\pi^2/2.$$

Oppgave 7. Vi har gitt vektorfeltet $\mathbf{F}(x, y, z) = (-xy, x^2, 1)$. Hvis kurven $\mathcal{C}$ er parametrisert ved

$$\mathbf{r}(t) = (-\sin t, \cos t, t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

så blir $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$

A: $1 - \pi$

B: 1

C: π

D: 0

✓ **E:** 2π

(Fortsettes på side 5.)

Løsning: Vi har at $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = (\sin t \cos t, \sin^2 t, 1)$ og $\mathbf{r}'(t) = (-\cos t, -\sin t, 1)$, slik at

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) = -\sin t \cos^2 t - \sin^3 t + 1 = -\sin t(\cos^2 t + \sin^2 t) + 1 = 1 - \sin t.$$

Dermed får vi

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt = \int_0^{2\pi} (1 - \sin t) dt = 2\pi.$$

Oppgave 8. Vektorfeltet

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (yze^{xyz} + 2x)\mathbf{i} + (xze^{xyz} + 4y)\mathbf{j} + (xye^{xyz} + 6z)\mathbf{k}$$

A: er ikke konservativt.

B: er konservativt, men har ingen potensialfunksjon.

✓ **C:** har $\phi(x, y, z) = e^{xyz} + x^2 + 2y^2 + 3z^2$ som potensialfunksjon.

D: har $\phi(x, y, z) = e^{xyz}$ som potensialfunksjon.

E: har $\phi(x, y, z) = e^{xyz} + xyz$ som potensialfunksjon.

Løsning: Hvis $\mathbf{F}$ har en potensialfunksjon ϕ så må

$$\begin{aligned}\frac{\partial \phi}{\partial x} &= yze^{xyz} + 2x \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} &= xze^{xyz} + 4y \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} &= xye^{xyz} + 6z.\end{aligned}$$

Integrerer vi får vi at

$$\begin{aligned}\phi(x, y, z) &= e^{xyz} + x^2 + C(y, z) \\ \phi(x, y, z) &= e^{xyz} + 2y^2 + D(x, z) \\ \phi(x, y, z) &= e^{xyz} + 3z^2 + E(x, y),\end{aligned}$$

der C , D og E er funksjoner. Vi ser at vi kan sette $C(y, z) = 2y^2 + 3z^2$, $D(x, z) = x^2 + 3z^2$, og $E(x, y) = x^2 + 2y^2$, slik at $\phi(x, y) = e^{xyz} + x^2 + 2y^2 + 3z^2$.

Oppgave 9. Skjæringen mellom kurven $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ og planet $z = 2x + 1$ gir en

A: sirkel

B: ellipse

C: parabel

✓ **D:** hyperbel

E: tom mengde

Løsning: Det skjærende planet er brattere enn kjeglen. Da har vi lært at snittflaten blir en hyperbel.

(Fortsettes på side 6.)

Oppgave 10. Hva slags kjeglesnitt får vi som løsningen på ligningen

$$3x^2 - 12x + 2y^2 - 4y + 8 = 0?$$

- A:** En hyperbel med sentrum i $(1, 2)$, med brennpunkter $(1, 1)$ og $(3, 1)$.
B: En hyperbel med sentrum i $(2, 1)$, med brennpunkter $(2, 0)$ og $(2, 2)$.
✓ C: En ellipse med sentrum i $(2, 1)$ med brennpunkter $(2, 0)$ og $(2, 2)$.
D: En ellipse med sentrum i $(2, 1)$ med brennpunkter $(1, 1)$ og $(3, 1)$.
E: En parabel med sentrum i $(1, 2)$ og brennpunkt $(1, 3)$.

Løsning: Vi har at

$$\begin{aligned} 3x^2 - 12x + 2y^2 - 4y + 8 &= 3(x^2 - 4x + 4) + 2(y^2 - 2y + 1) - 12 - 2 + 8 \\ &= 3(x - 2)^2 + 2(y - 1)^2 - 6, \end{aligned}$$

slik at ligningen kan skrives

$$\frac{(x - 2)^2}{2} + \frac{(y - 1)^2}{3} = 1.$$

Dette er en ellipse med sentrum i $(2, 1)$, med store halvakse $b = \sqrt{3}$, lille halvakse $a = \sqrt{2}$. Siden $b > a$ blir brennvidden $c = \sqrt{b^2 - a^2} = \sqrt{3 - 2} = 1$, og brennpunktene blir $(2, 1) \pm (0, 1)$, det vil si punktene $(2, 0)$ og $(2, 2)$.

Oppgave 11. Tangentplanet til funksjonen

$$f(x, y) = x^2 \cos(\pi y/x)$$

i punktet $(2, 2)$ er gitt ved

- A:** $z = -4 + 4x$
B: $z = -4 - 4x$
✓ C: $z = 4 - 4x$
D: $z = 4 - 4x - 4y$
E: $z = -4 - 4y$

Løsning: Vi har at $f(2, 2) = -4$, og

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \cos(\pi y/x) + \pi y \sin(\pi y/x) \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -x \sin(\pi y/x),$$

slik at

$$\frac{\partial f}{\partial x}(2, 2) = -4 \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(2, 2) = 0.$$

Dermed er tangentplanet gitt ved

$$z = f(2, 2) + \frac{\partial f}{\partial x}(2, 2)(x - 2) + \frac{\partial f}{\partial y}(2, 2)(y - 2) = -4 - 4(x - 2) = 4 - 4x.$$

(Fortsettes på side 7.)

Oppgave 12. Hva er den reduserte trappeformen til følgende matrise?

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

✓ **A:** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

B: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

C: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

D: $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

E: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Løsning:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Oppgave 13. Hva er pivotsøylene til følgende matrise?

$$\begin{pmatrix} -2 & -6 & -3 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

A: søyle 1, 2 og 3

B: søyle 1 og 3

C: søyle 1, 2 og 4

✓ **D:** søyle 1, 3 og 4

E: søyle 1, 2, 3 og 4

Løsning: Vi har at

$$\begin{pmatrix} -2 & -6 & -3 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & 4 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Det følger at søyle 1, 3, og 4 er pivotsøyer.

(Fortsettes på side 8.)

Oppgave 14. Hvilken påstand er sann?

A: Det finnes systemer $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ som har nøyaktig to løsninger.

B: Hvis A har et pivotelement i hver søyle så har $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ alltid løsning(er).

C: Trappeformen til en matrise er unik.

D: $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har alltid løsning(er) når A har flere søyler enn rader.

✓ **E:** Hvis A har et pivotelement i hver rad så har $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ alltid løsning(er).

Oppgave 15. For hvilken verdi av a har systemet

$$\begin{aligned}x + 3y &= a \\2x + 7y &= 2 \\-4x + 2y &= 3\end{aligned}$$

en entydig løsning?

A: $a = 2/3$.

B: $a = 4$.

✓ **C:** $a = 25/32$.

D: $a = 3$.

E: $a = 1/3$.

Løsning: Vi radreduserer

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & a \\ 2 & 7 & 2 \\ -4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & a \\ 0 & 1 & 2-2a \\ 0 & 14 & 3+4a \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & a \\ 0 & 1 & 2-2a \\ 0 & 0 & 3+4a-28+28a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & a \\ 0 & 1 & 2-2a \\ 0 & 0 & 32a-25 \end{pmatrix}$$

En entydig løsning har vi kun her når siste søyle ikke er en pivotsøyle, det vil si når $32a - 25 = 0$, det vil si når $a = 25/32$.

Det var det!