

UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i: MAT 1110 — Kalkulus og lineær algebra

Eksamensdag: Torsdag 21. mai 2026. Prøveeksamen

Tid for eksamen: 15:00 – 19:00.

Oppgavesettet er på 4 sider.

Vedlegg: Formelsamling.

Tillatte hjelpemidler: Godkjent kalkulator.

Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare spørsmålene.

Settet består av 10 deloppgaver som alle teller 6 poeng. Du må begrunne alle svar, og du må vise nok mellomregninger til at man lett kan følge argumentene dine.

Oppgave 1. Vi ser på matrisen $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 1 & 17 \\ 1 & 3 & -2 & 11 \end{pmatrix}$.

a) Finn en basis for søylerommet til A .

Svar: Vi har at

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 1 & 17 \\ 1 & 3 & -2 & 11 \end{pmatrix} &\stackrel{I \leftrightarrow III}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 11 \\ 4 & 3 & 1 & 17 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \\ &\stackrel{II - 4I}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 11 \\ 0 & -9 & 9 & -27 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \\ &\stackrel{II \leftrightarrow III}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 11 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & -9 & 9 & -27 \end{pmatrix} \\ &\stackrel{III + 9II}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & 11 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

De to første søylene er pivotsøyler, slik at $(0, 4, 1)$ og $(1, 3, 3)$ er en basis for søylerommet til A .

b) Utvid basisen du fant i a) til en basis for $\mathbb{R}^3$.

Svar: Vi kan sette inn en pivotsøyle med pivotelement i rad 3 i trappeformen over, og gjøre de reverse radoperasjonene i motsatt rekkefølge:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \stackrel{III - 9II}{\sim} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \stackrel{II \leftrightarrow III}{\sim} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \stackrel{II + 4I}{\sim} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \stackrel{I \leftrightarrow III}{\sim} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(Fortsettes på side 2.)

Vi har derfor at $\{(0, 4, 1), (1, 3, 3), (0, 1, 0)\}$ er en basis for $\mathbb{R}^3$.

Oppgave 2. Bruk Lagrange's multiplikatormetode til å finne det punktet hvor funksjonen $f(x, y, z) = x^2 + 4y^2 + 9z^2$ har sitt minimum under betingelsen $x + y + z = 1$. Hva kan du si om maksimum?

Svar: Vi har at $\nabla f = (2x, 8y, 18z)$, og $\nabla g = (1, 1, 1)$. Det er umulig å få $\nabla g = \mathbf{0}$, slik at vi bare trenger se på gradientlikningen $\nabla f = \lambda \nabla g$. Siden komponentene i vektoren på høyre side er like, så må de også være det på venstre side, slik at $2x = 8y = 18z$, og dermed $x = 9z$, $y = 9z/4$. Setter vi dette inn i $x + y + z = 1$ får vi at $49z/4 = 1$, slik at $z = 4/49$. Da blir $x = 36/49$, $y = 9/49$, slik at vi får eneste kandidat som $(36/49, 9/49, 4/49)$. Ved å bevege oss i planet $x + y + z = 1$ langt bort fra origo er det klart at vi kan finne så store verdier for f vi bare vil. f kan derfor ikke ha noe globalt maksimum. Hvis vi begrenser oss til punkter der $\|(x, y, z)\| \leq r$ så er det klart at vi kan velge r slik at f er vilkårlig stor utenfor dette området. Siden dette området er både lukket og begrenset så har det spesielt et minimum, og dette må da være et globalt minimum, siden verdiene utenfor $\|(x, y, z)\| \leq r$ kan antas å være større. Punktet vi har funnet må være dette globale minimumet.

Oppgave 3. I denne oppgaven skal vi se på funksjonen

$$f(x, y) = -x^3 + xy - y^2 + x.$$

a) Finn de stasjonære punktene til f .

Svar: Vi har at

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -3x^2 + y + 1 \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x - 2y.$$

$\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ gir at $x = 2y$, og dette innsatt i $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ gir at $-12y^2 + y + 1 = 0$, som har løsningen

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 48}}{-24} = \frac{1 \mp 7}{24},$$

som gir at $y = 1/3$ eller $y = -1/4$. Dermed blir $(2/3, 1/3)$ og $(-1/2, -1/4)$ de eneste stasjonære punktene.

b) Avgjør om de stasjonære punktene er sadelpunkter, lokale minimumspunkter, eller lokale maksimumspunkter.

Svar: Hessematrisen blir $Hf(x, y) = \begin{pmatrix} -6x & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Vi har at $Hf(2/3, 1/3) = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$. Determinanten til denne er 7, og siden $A = -4 < 0$ så er dette et maksimumspunkt.

Vi har at $Hf(-1/2, -1/4) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$. Determinanten til denne er -7 , slik at dette er et sadelpunkt.

Oppgave 4. I denne oppgaven skal vi finne volumet V til området avgrenset av paraboloiden $z = 6 - x^2 - y^2$ og kjeglen $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

(Fortsettes på side 3.)

a) Vis at

$$V = \int \int_D (6 - x^2 - y^2 - \sqrt{x^2 + y^2}) dx dy$$

der D er et område i xy -planet. Hvilket område er D ?

Svar: I polarkoordinater er paraboloiden gitt ved $z = 6 - r^2$, og kjeglen $z = r$. Skjæringen mellom disse finner vi når $6 - r^2 = r$, som gir $r^2 + r - 6 = 0$, som gir $r = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2}$. Den eneste positive løsningen her er $r = 2$, slik at skjæringen er sirkelen $x^2 + y^2 = r^2 = 4$, og D er området innenfor denne sirkelen. I $(0,0)$ er det klart at paraboloiden tar verdien 6, mens kjeglen tar verdien 0, slik at paraboloiden ligger over kjeglen i det avgrensede området. Det følger at $V = \int \int_D (6 - x^2 - y^2 - \sqrt{x^2 + y^2}) dx dy$.

b) Regn ut V

Svar: I polarkoordinater blir integralet

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \left[\int_0^2 (6 - r^2 - r) r dr \right] d\theta &= \int_0^{2\pi} \int_0^2 (6r - r^3 - r^2) dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left[3r^2 - \frac{1}{4}r^4 - \frac{1}{3}r^3 \right]_0^2 d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(12 - 4 - \frac{8}{3} \right) d\theta = 2\pi \frac{16}{3} = \frac{32\pi}{3} \end{aligned}$$

Oppgave 5. Vi ser på vektorfeltet $\mathbf{F}$ definert ved

$$\mathbf{F}(x, y, z) = xy\mathbf{i} + z\mathbf{j} + (x + y)\mathbf{k}.$$

a) Avgjør om $\mathbf{F}$ kan skrives som en gradient til en funksjon, eller curl til et vektorfelt.

Svar: Hvis $\mathbf{F} = \nabla\phi$ så kan vi skrive

$$\phi(x, y, z) = \frac{1}{2}x^2y + f(y, z) = zy + g(x, z) = xz + yz + h(x, y),$$

der f, g, h er funksjoner i to variable. De to første uttrykkene er ikke forenlige. Anta $\mathbf{F} = \text{curl}(\mathbf{G})$. da er $\text{div}\mathbf{F} = \text{div}(\text{curl}(\mathbf{G})) = 0$, men dette er ikke oppfylt siden $\text{div}\mathbf{F} = y$.

b) La V være området avgrenset av xy -, xz -, og yz -planet, samt planene $y = 4$ og $x + z = 4$. Finn $\int_T \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS$ der T er overflaten til V , og $\mathbf{n}$ peker ut av V .

Svar: Divergensteoremet gir

$$\begin{aligned} \int_T \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS &= \int \int \int_V \text{div}\mathbf{F} dx dy dz = \int_0^4 \left[\int_0^4 \left[\int_0^{4-x} y dz \right] dx \right] dy \\ &= \int_0^4 \left[\int_0^4 y(4-x) dx \right] dy = \int_0^4 (4-x) dx \int_0^4 y dy \\ &= [4x - x^2/2]_0^4 [y^2/2]_0^4 = 8 \cdot 8 = 64. \end{aligned}$$

(Fortsettes på side 4.)

c) Finn linjeintegralet $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ der C er randkurven til den delen av T som ligger i planet $x + z = 4$. Du kan selv velge orientering på C .

Svar: Flaten er parametrisert ved $\mathbf{r}(x, y) = (x, y, 4 - x)$, $0 \leq x \leq 4$, $0 \leq y \leq 4$. Vi får

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} = (1, 0, -1) \times (0, 1, 0) = (1, 0, 1).$$

Velger vi derfor normalvektoren til å ha fortegn med positiv z -komponent så trenger vi ikke å endre fortegn når vi bruker Stokes' teorem. Videre er $\text{curl} \mathbf{F} = (0, -1, -x)$. Stokes' teorem gir

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_T \text{curl} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = \int_0^4 \left[\int_0^4 (0, -1, -x) \cdot (1, 0, 1) dx \right] dy \\ &= \int_0^4 \left[\int_0^4 -x dx \right] dy = \int_0^4 -8 dy = -32. \end{aligned}$$

Lykke til!