

Velkommen til MAT110!

Forelesere: Øyvind Ryan og Michael Floater
mandager/torsdager 10¹⁵-12⁰⁰. 6 grupper

Kurssidene: Ukesoppgaver

pensum

Obliger

Timeplan

ressurser

tillitsvalgte

KOLA: Kalkulus og lineær algebra
(Hole)

FVLA: Flervariabel analyse med
lineær algebra (Lindstrøm)

Pensum (FVLA): kap. 1-3, sek 4.1-4.6, kap 5. (ikke 5.3), kap. 6

Øversettelse mellom KOLA og FVLA

MAT1105: Markert i timeplan hva som er repetisjon.

Kap.1: Vektorer og matriser (1.1-1.3 i dag) (MAT1105 har dette)

Kap.2: Funksjoner i flere variable

Kap.3: Kurver og flater

Kap.4: Lineær algebra (MAT1105 har dette)

Kap.5: Iterasjon og optimering

Kap.6: Integrasjon i flere variable

Obliger: 26/2 og 9/4

Ingen opptak. Forelesningsnotater legges ut som pdf.

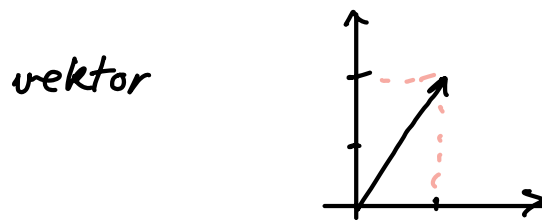
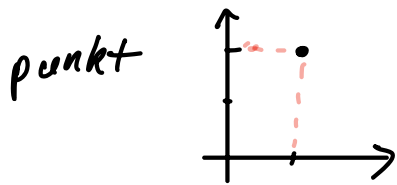
Seksjon 1.1 Algebra for n -tupler

Et n -tupel: en liste med tall.

$$\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$$

dimensjonen til $\vec{a}$, antall komponenter

Tuplet $(1, 2)$ kan tolkes som



Nullvektoren $\vec{0}$: tuplet med bare nuller, $\vec{0}_n$

$\vec{e}_i$: vektoren med 1 på plass i , nuller ellers.

$\vec{e}_1 = (1, 0)$, $(1, 0, 0), \dots$ (enhetsbasisvektor)

$\vec{e}_2 = (0, 1)$, $(0, 1, 0), \dots$

Regning med n-tupler / vektorer

Hvis $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n)$, $\vec{b} = (b_1, \dots, b_n)$ (begge med n komponenter),
da er

$\vec{a} + \vec{b}$ definert som vektoren $(a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n)$

$\vec{a} - \vec{b}$ " " $(a_1 - b_1, \dots, a_n - b_n)$

$t \vec{a}$ " " $(ta_1, \dots, ta_n)$ (t skalar)

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$$

Eks. La $\vec{a} = (1, 2, 4, 3)$, $\vec{b} = (-1, 0, 2, 8)$, $t = 3$. Da er

$$\begin{aligned}\vec{a} + \vec{b} &= (1, 2, 4, 3) + (-1, 0, 2, 8) = (1 + (-1), 2 + 0, 4 + 2, 3 + 8) \\ &= \underline{(0, 2, 6, 11)}\end{aligned}$$

$$t \vec{a} = 3(1, 2, 4, 3) = (3 \cdot 1, 3 \cdot 2, 3 \cdot 4, 3 \cdot 3) = \underline{(3, 6, 12, 9)}$$

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{b} &= (1, 2, 4, 3) \cdot (-1, 0, 2, 8) = 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 0 + 4 \cdot 2 + 3 \cdot 8 \\ &= -1 + 8 + 24 = \underline{31}\end{aligned}$$

Regnerøglør Hvis $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ har like mange komponenter, s, t skalar

$$(a) \quad \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

$$(b) \quad \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

$$(c) \quad s(\vec{a} + \vec{b}) = s\vec{a} + s\vec{b}$$

$$(d) \quad (s+t)\vec{a} = s\vec{a} + t\vec{a}$$

$\vdots$

$$(g) \quad \vec{a} \cdot \vec{a} \geq 0, \text{ med likhet hvis og bare hvis } \vec{a} = \vec{0}$$

Geometri for n-tupler (1.2 i FVLA)

$\mathbb{R}^n$ = mengden av alle vektorer med n komponenter.

Lengden til en vektor: $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}$
kan skrives $\vec{a} \cdot \vec{a}$
s.a. $|\vec{a}|^2 = \vec{a} \cdot \vec{a}$

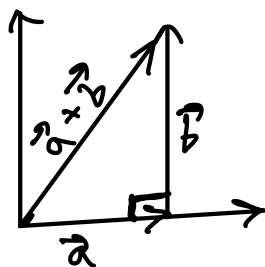
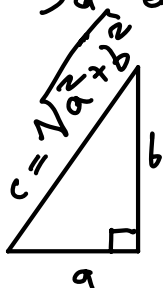
Det er klart at $|s\vec{a}| = |s| |\vec{a}|$:

$$\begin{aligned} |s\vec{a}| &= |(sa_1, \dots, sa_n)| = \sqrt{(sa_1)^2 + \dots + (sa_n)^2} \\ &= \sqrt{s^2(a_1^2 + \dots + a_n^2)} \\ &= |s| \sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2} = |s| |\vec{a}| \end{aligned}$$

Vi sier at $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er ortogonale hvis $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$,
skrevet $\vec{a} \perp \vec{b}$

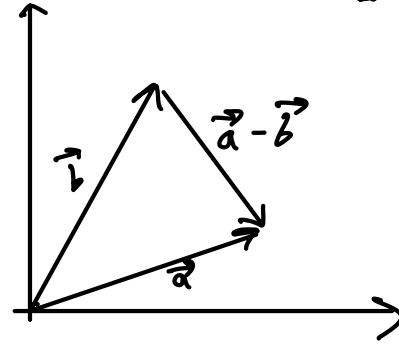
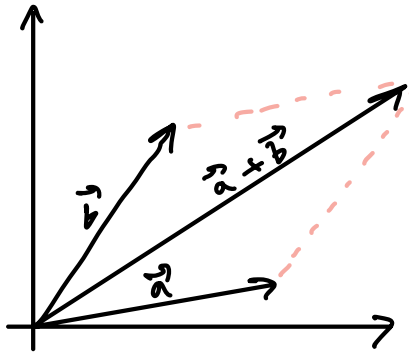
Pythagoras for vektorer: Dersom $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er ortogonale,

Så er $|\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2$

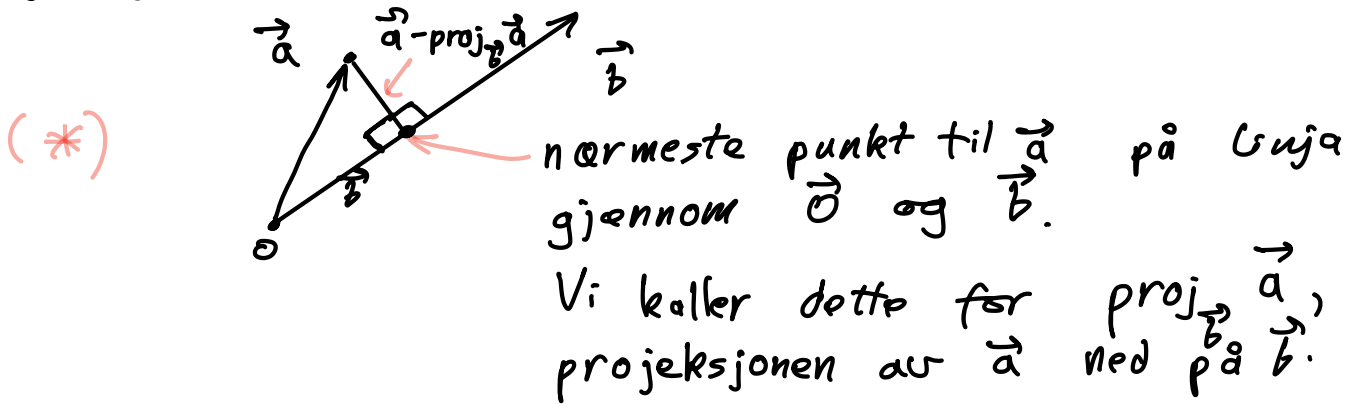


her er $|\vec{a}| = a$
 $|\vec{b}| = b$
 $|\vec{a} + \vec{b}| = c$

Beris: $|\vec{a} + \vec{b}|^2 = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b}$
 $= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2$



Projeksjon: La $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^2$, $\vec{b} \neq \vec{0}$



Proposisjon: Vi har at $\text{proj}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b}$

Beris Bruker Pythagoras på (*).

Viser først: $\vec{a} - \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b}$ og $\vec{b}$ er ortogonale.

$$\begin{aligned} \left(\vec{a} - \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b} \right) \cdot \vec{b} &= \vec{a} \cdot \vec{b} - \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b} \cdot \vec{b} \\ &= \vec{a} \cdot \vec{b} - \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} |\vec{b}|^2 = \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \end{aligned}$$

Vi skriver:

$$\vec{a} = \underbrace{\left(\vec{a} - \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b} \right)}_{\text{ortogonal på } \vec{b}} + \underbrace{\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b}}_{\text{parallel med } \vec{b}}$$

La $s \in \mathbb{R}$. Da er

$$|\vec{a} - s\vec{b}|^2 = \left| \underbrace{\left(\vec{a} - \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b} \right)}_{\text{ort.}} + \underbrace{\left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b} - s\vec{b} \right)}_{\left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} - s \right) \vec{b}} \right|^2$$

$$\begin{aligned} \text{Pythagoras} &= \left| \vec{a} - \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b} \right|^2 + \left| \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b} - s\vec{b} \right|^2 \\ &\geq \left| \vec{a} - \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b} \right|^2 \end{aligned}$$

Dette gir s'en vår, som gir nærmeste punkt

Derfor: $\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b}$ er punktet på linja som er nærmest $\vec{a}$.

Schwarz ulikhet: $|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq |\vec{a}| |\vec{b}|$, med likhet hvis og bare hvis $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er parallelle

Beris: Siden $\vec{a} - \text{proj}_{\vec{b}} \vec{a}$ er ortogonal på $\vec{b}$:

$$|\vec{a}|^2 = |(\vec{a} - \text{proj}_{\vec{b}} \vec{a}) + \text{proj}_{\vec{b}} \vec{a}|^2$$

$$\text{Pythagoras} = |\vec{a} - \text{proj}_{\vec{b}} \vec{a}|^2 + |\text{proj}_{\vec{b}} \vec{a}|^2 \geq |\text{proj}_{\vec{b}} \vec{a}|^2$$

$$\text{Derfor er } |\text{proj}_{\vec{b}} \vec{a}| \leq |\vec{a}|$$

$$\text{Dermed: } \left| \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b} \right| \leq |\vec{a}|$$

$$\frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{b}|^2} |\vec{b}| \leq |\vec{a}|$$

$$\frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{b}|} \leq |\vec{a}|$$

$$|\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq |\vec{a}| |\vec{b}|$$

Trekantulikheten: $|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$ for alle $\vec{a}, \vec{b}$

$$\begin{aligned} \text{Bevis: } |\vec{a} + \vec{b}|^2 &= (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{b} \\ &= |\vec{a}|^2 + 2(\vec{a} \cdot \vec{b}) + |\vec{b}|^2 \\ &\leq |\vec{a}|^2 + 2|\vec{a} \cdot \vec{b}| + |\vec{b}|^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Schwarz} &\leq |\vec{a}|^2 + 2|\vec{a}||\vec{b}| + |\vec{b}|^2 \\ &= (|\vec{a}| + |\vec{b}|)^2\end{aligned}$$

Ta kvadratrottet: $|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$

pythagoras $\rightarrow$ projeksjon $\rightarrow$ Schwarz $\rightarrow$ Trekantulikhet.