

Forskjell mellom mitt bevis om projeksjoner fra sist gang, og beviset i FVLA:

Jeg definerte $\text{proj}_{\vec{b}} \vec{a}$ som nærmeste punkt til $\vec{a}$ på linja gjennom $\vec{b}$, og viste at $\text{proj}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b}$, og at $\vec{a} - \text{proj}_{\vec{b}} \vec{a}$ er ortogonal på $\vec{b}$.

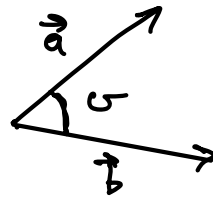
Ulempe: Utleder ikke $\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b}$ konstruktivt.

FVLA: Definerer $\text{proj}_{\vec{b}} \vec{a}$ som punktet på linja gjennom $\vec{b}$ som oppfyller at $\vec{a} - \text{proj}_{\vec{b}} \vec{a}$ er ortogonal på $\vec{b}$, og utleder uttrykket $\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b}$ konstruktivt.

Ulempe: Tolker ikke $\text{proj}_{\vec{b}} \vec{a}$ som et nærmeste punkt til $\vec{a}$

Se også seksjon 7.3 i bind 2 i Arne Høles bok

Vinkel mellom n -tupler



pga Schwarz ulikhet:

$$\frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{a}| |\vec{b}|} \leq 1 \text{ s.a. } -1 \leq \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} \leq 1$$

Derfor er $\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \cos \nu$ for en unik ν , $0 \leq \nu \leq \pi$

$$\text{s.a. } \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \nu.$$

Linja gjennom $\vec{a}$ parallell med $\vec{b}$ består av alle punkter $\vec{a} + t \vec{b}$, $t \in \mathbb{R}$ retningsvektor.

Eks: Går linja gjennom $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, og som er parallell med $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, gjennom $\begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix}$?

Vi må løse: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} 1 + 2t &= 6 \Rightarrow t = 5/2 \\ 1 + 4t &= 7 \Rightarrow t = 3/2 \end{aligned}$, så $\begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix}$ ligger ikke på denne linja.

1.3 Komplekse n-tupler

Hvis komponentene i $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er komplekse tall definerer vi

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \bar{b}_1 + a_2 \bar{b}_2 + \dots + a_n \bar{b}_n$$

$$\text{Spesielt: } \vec{a} \cdot \vec{a} = a_1 \bar{a}_1 + \dots + a_n \bar{a}_n = |a_1|^2 + \dots + |a_n|^2$$

Lengde defineres som

$$|\vec{a}| = \sqrt{|a_1|^2 + \dots + |a_n|^2}, \text{ s.a. } |\vec{a}|^2 = \vec{a} \cdot \vec{a}$$

Merk: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \overline{\vec{b} \cdot \vec{a}}$

$$\begin{aligned} a_1 \bar{b}_1 + \dots + a_n \bar{b}_n &= \overline{b_1 \bar{a}_1 + \dots + b_n \bar{a}_n} \\ &= \overline{b_1 \bar{a}_1} + \dots + \overline{b_n \bar{a}_n} \\ &= \bar{b}_1 a_1 + \dots + \bar{b}_n a_n \end{aligned}$$

2.1 Funksjoner i flere variable

En funksjon $\vec{F}$ fra $\mathbb{R}^n$ til $\mathbb{R}^m$: En regel som

til hver $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ gir oss en $\vec{y} = \vec{F}(\vec{x}) \in \mathbb{R}^m$

Eks: $\vec{F}(\vec{x}) = \vec{x} + \vec{a}$ ($\vec{F}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$)

$$f(x, y, z) = x^2 y + y^3 z \quad (f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ kalles et skalarfelt})$$

$$\vec{F}(\vec{x}) = -\frac{\gamma m M}{|\vec{x}|^3} \vec{x} \quad (\vec{F}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \text{ Gravitasjonskraft})$$

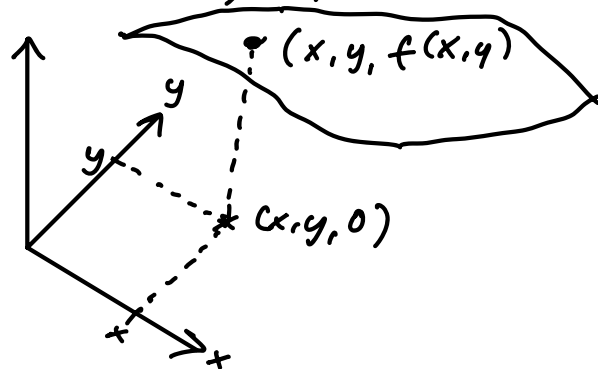
$\vec{F}$ kan ha en definisjonsmengde A

Bildet av A under $\vec{F}$: $B = \{ \vec{F}(\vec{x}) : \vec{x} \in A \}$ (skrives $\vec{F}(A)$)



Plott av skalarfelt: Grafen til f er alle punkter

$$(x, y, f(x, y)), (x, y) \in A$$



2.2 Kontinuerlige funksjoner

Avstanden mellom $\vec{x}$ og $\vec{a}$ i $\mathbb{R}^n$ er

$$|\vec{x} - \vec{a}| = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + \dots + (x_n - a_n)^2}$$

$$B(\vec{a}, r) = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n : |\vec{x} - \vec{a}| < r \} \text{ (kule om } \vec{a} \text{ med radius } r)$$

Definisjon Anta $A \subset \mathbb{R}^n$, og $\vec{a} \in A$.

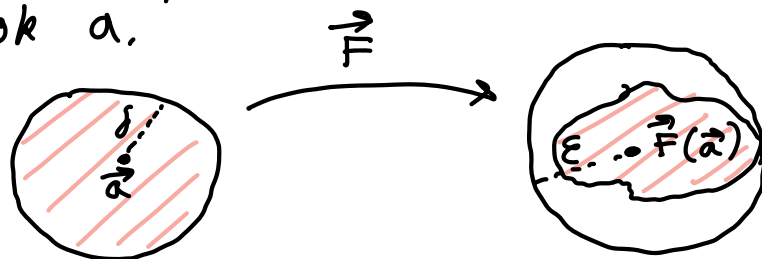
$\vec{F}: A \rightarrow \mathbb{R}^m$ sies å være kontinuerlig i $\vec{a}$

dersom det til enhver $\varepsilon > 0$ finnes en $\delta > 0$ s.a.

$$|\vec{F}(\vec{x}) - \vec{F}(\vec{a})| < \varepsilon \text{ for alle } \vec{x} \in A \text{ s.a. } |\vec{x} - \vec{a}| < \delta$$

$$|\vec{x} - \vec{a}| < \delta \Rightarrow |\vec{F}(\vec{x}) - \vec{F}(\vec{a})| < \varepsilon$$

"Vi kan få $\vec{F}(\vec{x})$ så nære $\vec{F}(\vec{a})$ vi vil, bare vi velger $\vec{x}$ nær nok $\vec{a}$."



$\vec{F}$ kalles kontinuerlig hvis den er kont. i alle punkter i definisjonsmengden A .

Setning: La $A \subset \mathbb{R}^n$, og $\vec{F}, \vec{G}$ kontinuertlige i $\vec{a} \in A$.
 Da er $\vec{F} + \vec{G}, \vec{F} - \vec{G}, \vec{F} \cdot \vec{G}$, også kont. i $\vec{a}$.
 Hvis $f, g: A \rightarrow \mathbb{R}$ er kont i $\vec{a}$ og $g(\vec{a}) \neq 0$,
 så er $\frac{f}{g}$ også kont. i $\vec{a}$.

Her er $\vec{F} \cdot \vec{G}$ definert ved $(\vec{F} \cdot \vec{G})(\vec{x}) = \vec{F}(\vec{x}) \cdot \vec{G}(\vec{x})$

Vi viser at $\vec{F} + \vec{G}$ er kont.:

Siden $\vec{F}, \vec{G}$ er kont. i $\vec{a}$: For hver $\varepsilon > 0$ finnes $\delta_1, \delta_2 > 0$ s.a.

$$\begin{aligned} |\vec{F}(\vec{x}) - \vec{F}(\vec{a})| &< \frac{\varepsilon}{2} && \text{for alle } \vec{x} \in A \text{ s.a. } |\vec{x} - \vec{a}| < \delta_1, \\ |\vec{G}(\vec{x}) - \vec{G}(\vec{a})| &< \frac{\varepsilon}{2} && \text{for alle } \vec{x} \in A \text{ s.a. } |\vec{x} - \vec{a}| < \delta_2 \end{aligned}$$

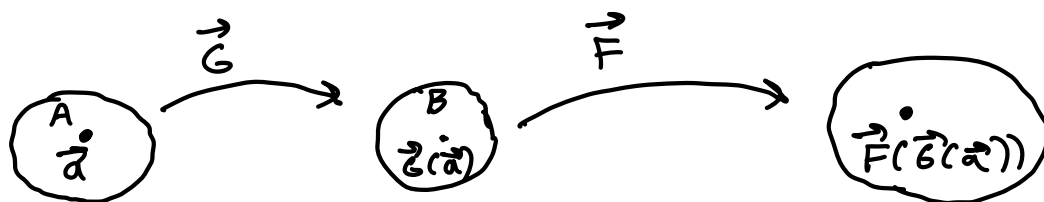
Sett $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. For $|\vec{x} - \vec{a}| < \delta$ er

$$\begin{aligned} |(\vec{F} + \vec{G})(\vec{x}) - (\vec{F} + \vec{G})(\vec{a})| &= |\vec{F}(\vec{x}) + \vec{G}(\vec{x}) - \vec{F}(\vec{a}) - \vec{G}(\vec{a})| \\ &= |\vec{F}(\vec{x}) - \vec{F}(\vec{a}) + \vec{G}(\vec{x}) - \vec{G}(\vec{a})| \end{aligned}$$

$$\stackrel{\text{trekant}}{\leq} |\vec{F}(\vec{x}) - \vec{F}(\vec{a})| + |\vec{G}(\vec{x}) - \vec{G}(\vec{a})| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

som var det vi skulle vise. ■

Setning: Sammensetningen av kontinuertlige funksjoner er kontinuertlig.



$H(\vec{x}) = \vec{F}(\vec{G}(\vec{x}))$ er kont i $\vec{a}$ når $\vec{G}$ er kont i $\vec{a}$,
 og $\vec{F}$ kont. i $\vec{G}(\vec{a})$.

Hvis $\vec{F}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ skriver vi $F_1, F_2, \dots, F_m$ for komponentfunksjonene til $\vec{F}$, d.v.s

$$\vec{F}(\vec{x}) = (F_1(\vec{x}), \dots, F_m(\vec{x}))$$

Setning: $\vec{F}$ er kont. i $\vec{a} \iff$ alle komponentfunksjoner F_i er kont. i $\vec{a}$

Viser $\Leftarrow$: Antar $F_1, \dots, F_m$ kont. Skal vise at for enhver $\varepsilon > 0$ finnes $\delta > 0$ s.a. $|\vec{x} - \vec{a}| < \delta \Rightarrow |\vec{F}(\vec{x}) - \vec{F}(\vec{a})| < \varepsilon$

Siden F_i kont: Finnes $\delta_i > 0$ s.a.

$$|\vec{x} - \vec{a}| < \delta_i \Rightarrow |F_i(\vec{x}) - F_i(\vec{a})| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}$$

La $\delta = \min(\delta_1, \dots, \delta_m)$. Da er

$$\begin{aligned} |\vec{F}(\vec{x}) - \vec{F}(\vec{a})| &= \sqrt{(F_1(\vec{x}) - F_1(\vec{a}))^2 + \dots + (F_m(\vec{x}) - F_m(\vec{a}))^2} \\ &< \sqrt{\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}\right)^2 + \dots + \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}\right)^2} = \sqrt{m \cdot \frac{\varepsilon^2}{m}} = \varepsilon \quad \blacksquare \end{aligned}$$

koordinatfunksjoner på $\mathbb{R}^n$: $k_1, \dots, k_n$ definert ved $k_i(\vec{x}) = x_i$

Identitetsavbildningen $\text{id}: \vec{x} \mapsto \vec{x}$ kan skrives

$$(x_1, \dots, x_n) \rightarrow (k_1(\vec{x}), \dots, k_n(\vec{x}))$$

Siden id er kontinuert, og k_i er dens komponentfunksjoner, så følger at k_i også er kontinuert.

Eks: Vi ser på $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ def. ved $f(x, y, z) = e^{xy} + x^3 z$

$$\text{Denne kan skrives } f(\underbrace{x, y, z}_{\vec{x}}) = e^{k_1(\vec{x})k_2(\vec{x})} + k_1(\vec{x})^3 k_3(\vec{x})$$

Siden k_i er kont., sammensetning av kont. funksjoner er kont., og sum/prod av kont. funksjoner også er kont., så følger at f også er kont.