

Sek. 2,2 avslutningsvis

Viktig eksempel: Se på $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Er f kontinuertlig i $(0,0)$?

Løsning:

La $(x,y) \rightarrow \vec{0}$ langs en skrålinje $y = cx$, $c \neq 0$

$$f(x,y) = f(x,cx) = \frac{x^2 cx}{x^4 + c^2 x^2} = \frac{cx}{x^2 + c^2} \rightarrow \frac{0}{c^2} = 0$$

La $(x,y) \rightarrow \vec{0}$ langs en parabel $y = x^2$

$$f(x,y) = f(x,x^2) = \frac{x^2 x^2}{x^4 + x^4} = \frac{x^4}{2x^4} = \frac{1}{2}$$

f er derfor ikke kontinuertlig:

Vi kan få verdi $\frac{1}{2}$ for f , så nær $(x,y) = (0,0)$ vi måtte ønske, og $\frac{1}{2} \neq f(\vec{0}) = 0$.

2.3 Grenseverdier

Anta $A \subset \mathbb{R}^n$, $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ kalles et opphopningspunkt for A dersom enhver kule $B(\vec{a}, r)$ inneholder uendelig mange punkter fra A .



Definisjon: Anta $\vec{F}: A \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\vec{a}$ opphopningspunkt for A

Vi sier at $\vec{b}$ er grenseverdien for $\vec{F}$ i punktet $\vec{a}$ dersom det for hver $\varepsilon > 0$ finnes en $\delta > 0$ s.a.

$$|\vec{F}(\vec{x}) - \vec{b}| < \varepsilon \text{ for alle } \vec{x} \in A \text{ s.a. } 0 < |\vec{x} - \vec{a}| < \delta$$

Vi skriver også $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \vec{F}(\vec{x}) = \vec{b}$

Setning 2.3.3 i FVLA: Grenseverdier kan beregnes komponentvis:

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \vec{F}(\vec{x}) = \vec{b} \Leftrightarrow \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} F_i(\vec{x}) = b_i, \text{ der } \vec{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$$

Grenseverdier oppfyller kjente regneregler:

Hvis $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \vec{F}(\vec{x}) = \vec{b}$, $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \vec{G}(\vec{x}) = \vec{c}$, så er

$$(i) \lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} (\vec{F}(\vec{x}) + \vec{G}(\vec{x})) = \vec{b} + \vec{c}$$

(ii)

$\vec{F}$ er kont. i $\vec{a}$ hvis og bare hvis $\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{a}} \vec{F}(\vec{x}) = \vec{F}(\vec{a})$

Eksempel: Hva blir $\lim_{\vec{x} \rightarrow (0,0)} \frac{\overbrace{x^2 y}^{f(x,y)}}{x^2 + y^2}$?

Løsning: Her er $\vec{a} = (0,0)$, og f er ikke definert i $\vec{a}$.

$$\text{Vi har at } |f(x,y)| = \left| \frac{x^2}{x^2 + y^2} \right| |y| \leq |y| \leq \varepsilon$$

kan få dette så nær 0 vi vil, bare (x,y) er nær nok $(0,0)$:

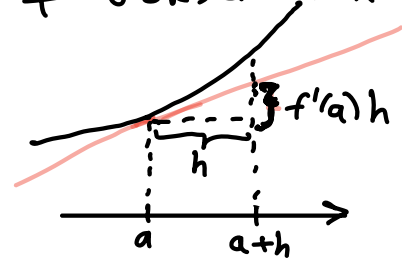
$$\begin{array}{ccc} |y| \leq |(x,y)| & |(x,y) - (0,0)| < \delta \Rightarrow |f(x,y) - 0| < \varepsilon & \\ & \downarrow & \\ & |y| < \varepsilon & \text{kan sette } \delta = \varepsilon \\ & & \downarrow \\ & & \text{Grenseverdien eksisterer.} \end{array}$$

$$\text{Funksjonen } f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

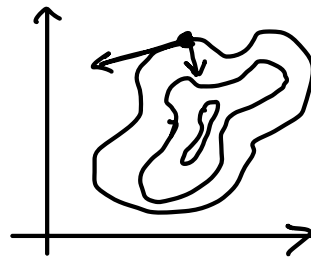
er derfor kontinuert i $(0,0)$.

2.4 Derivasjon av skalarfelt

Hvis $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$: $f'(a)$ forteller hvor fort f vokser i $x=a$



Hvis $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$: f kan vokse i forskjellige retninger fra $\vec{x}=\vec{a}$



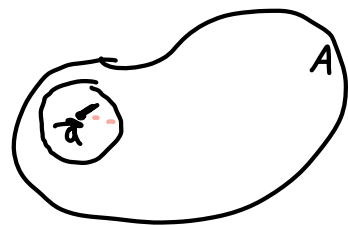
$f(x,y) = \text{høyde over havet.}$

Den retningsderiverte, $f'(\vec{a}; \vec{r})$, er grenseverdien

$$f'(\vec{a}; \vec{r}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\vec{a} + h\vec{r}) - f(\vec{a})}{h}$$

"Hvor fort f vokser i $\vec{a}$, i retning $\vec{r}$."

Definisjon: $\vec{a}$ kalles et indre punkt i A hvis det finnes en $\varepsilon > 0$ s.a $B(\vec{a}, \varepsilon) \subset A$



Hvis $\vec{a}$ er et indre punkt så er $f(\vec{a} + h\vec{r})$ definert, bare h liten nok.

Definisjon: Anta $\vec{a}$ indre punkt, så kalles den retningsderiverte

$f'(\vec{a}; \vec{e}_i)$ for den i-te partielle deriverte.

Vi skriver $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{a})$ for denne.

Hvis alle $\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{a}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{a})$ eksisterer,

så kalles vektoren $(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{a}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{a}))$ for gradienten til f i $\vec{a}$

Eksempel: Ser igjen på $f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$, def. på $\mathbb{R}^2$
(utenom $(0,0)$)

$$f' \left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{a}}; \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{r}} \right) : \vec{a} + h\vec{r} = \begin{pmatrix} 1+h \\ 0 \end{pmatrix}, f(\vec{a} + h\vec{r}) = 0, f(\vec{a}) = 0$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\vec{a} + h\vec{r}) - f(\vec{a})}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = \underline{0} = \frac{\partial f}{\partial x} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f' \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{ny } \vec{r}} \right) : \vec{a} + h\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ h \end{pmatrix}, f(\vec{a} + h\vec{r}) = \frac{h}{1+h^2}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\vec{a} + h\vec{r}) - f(\vec{a})}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{(1+h^2)h} = \underline{1} = \frac{\partial f}{\partial y} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Derfor: $\nabla f \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{\partial f}{\partial y} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = (0, 1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$f' \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{ny } \vec{r}} \right) : \vec{a} + h\vec{r} = \begin{pmatrix} 1+h \\ h \end{pmatrix}, f(\vec{a} + h\vec{r}) = \frac{(1+h)^2 h}{(1+h)^4 + h^2}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\vec{a} + h\vec{r}) - f(\vec{a})}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(1+h)^2}{(1+h)^4 + h^2} = \underline{1}$$

Merk: Siden $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{a}) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i + h, a_{i+1}, \dots, a_n) - f(\vec{a})}{h}$,

finner vi de partielle deriverte ved å derivere på vanlig måte, og "late som" $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$ er konstante.

Eksempel Med $f(x,y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2xy(x^4 + y^2) - 4x^3(x^2 y)}{(x^4 + y^2)^2} = \frac{2xy^3 - 2x^5 y}{(x^4 + y^2)^2}, \frac{\partial f}{\partial x} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^2(x^4 + y^2) - 2y(x^2 y)}{(x^4 + y^2)^2} = \frac{x^6 - x^2 y^2}{(x^4 + y^2)^2}, \frac{\partial f}{\partial y} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$$

fikk tidligere.