

Fra sist: Vi definerte retningsderiverte i Seksjon 2.4

Hvis f er deriverbar i $\vec{a}$, så er $f'(\vec{a}; \vec{r}) = \nabla f(\vec{a}) \cdot \vec{r}$

Betyr: $\sigma(\vec{r}) = f(\vec{a} + \vec{r}) - f(\vec{a}) - \nabla f(\vec{a}) \cdot \vec{r}$ gir fortere
feil ved 1. ordens Taylor
mot 0 enn $|\vec{r}|$, dvs $\lim_{\vec{r} \rightarrow \vec{0}} \frac{\sigma(\vec{r})}{|\vec{r}|} = 0$.
krever $\vec{a}$ indre punkt, partielle deriverte eksisterer.

Beweis:

$$\begin{aligned} f'(\vec{a}; \vec{r}) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\vec{a} + h\vec{r}) - f(\vec{a})}{h} \\ &\stackrel{\text{def. av der.}}{=} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sigma(h\vec{r}) + \nabla f(\vec{a}) \cdot (h\vec{r})}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sigma(h\vec{r})|\vec{r}|}{h|\vec{r}|} + \lim_{h \rightarrow 0} \nabla f(\vec{a}) \cdot \vec{r} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sigma(h\vec{r})}{|h\vec{r}|} |\vec{r}| + \lim_{h \rightarrow 0} \nabla f(\vec{a}) \cdot \vec{r} = \nabla f(\vec{a}) \cdot \vec{r}. \end{aligned}$$

Eks. Vi hadde $f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$. Vi regnet $\nabla f\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Med $\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ får vi

$$\nabla f\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) \cdot \vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1, \text{ som vi og så} \\ \text{fikk ved direkte utregning av } f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

Definisjon Vi sier at f er definert i en omegn
om $\vec{a}$ dersom det finnes en kule $B(\vec{a}, \varepsilon)$ der
 f er definert.

Teorem: Hvis alle de partielle deriverte er definert i en omegn om $\vec{a}$, og de er kontinuertlige i $\vec{a}$, så er f deriverbar i $\vec{a}$.

Setning: Anta f er deriverbar i $\vec{a}$. Da peker gradienten i den retningen f vokser hurtigst. Stigningstallet i denne retningen er $|\nabla f(\vec{a})|$.

Bevis: La $\vec{u}$ være en enhetsvektor ($|\vec{u}| = 1$). Vi har:

Schwarz

$$f'(\vec{a}; \vec{u}) = \nabla f(\vec{a}) \cdot \vec{u} \leq |\nabla f(\vec{a})| |\vec{u}| = |\nabla f(\vec{a})|$$

hvor fort f vokser i retning $\vec{u}$.

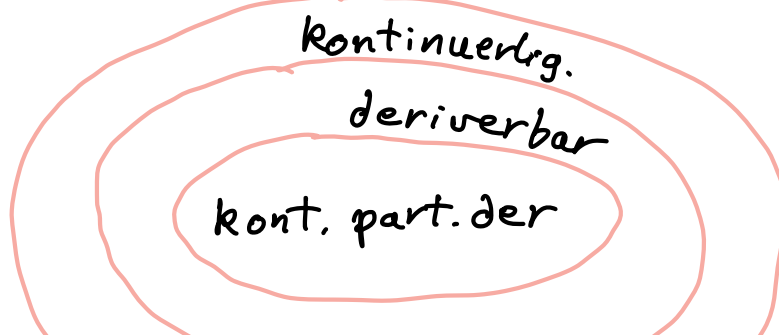
Videre: Kun lkkhet når $\vec{u}$ og $\nabla f(\vec{a})$ er parallelle, og peker i samme retning.

Så f vokser raskest når $\vec{u}$ og $\nabla f(\vec{a})$ peker i samme retning.

Eks. $f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$. Vi fant $\nabla f(\vec{0}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

f vokser raskest når vi øker y , holder x konst.

Setning: Gitt $f: A \rightarrow \mathbb{R}$. Dersom f er deriverbar i $\vec{a} \in A$, så er f også kontinuertlig i $\vec{a}$.



2.5 Partielle deriverte av høyere orden.

$f(x,y)$ har to partielle deriverte: $\frac{\partial f}{\partial x}(\vec{a})$ og $\frac{\partial f}{\partial y}(\vec{a})$

4 andrederiverte: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial(\frac{\partial f}{\partial x})}{\partial x}$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial(\frac{\partial f}{\partial y})}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial(\frac{\partial f}{\partial x})}{\partial y}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial(\frac{\partial f}{\partial y})}{\partial y}$$

Eks: $f(x,y) = x^3 + 2xy + y^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 2y \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2x + 2y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} (2x + 2y) = 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} (3x^2 + 2y) = 2$$

ble like.

Setning: Anta $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ og $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ eksisterer i en omegn om $\vec{a}$, og er kontinuerlige i $\vec{a}$.

$$\text{Da er } \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\vec{a}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\vec{a})$$

1.5 Matriser

dimensjonen til A.

En $m \times n$ -matrise: Tabell med m rader og n søyler

komponent

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad a_{ij} \text{ er i rad } i, \text{ søyle } j$$

radvektor: $(1 \quad 0 \quad 2 \quad 4)$ søylevektor $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$

Anta A og B er matriser med komponenter a_{ij} , b_{ij} , og lik dimensjon. Vi definerer:

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$A - B = \begin{pmatrix} a_{11} - b_{11} & \dots & a_{1n} - b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} - b_{m1} & \dots & a_{mn} - b_{mn} \end{pmatrix}$$

skalar

$$sA = \begin{pmatrix} sa_{11} & \dots & sa_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ sa_{m1} & \dots & sa_{mn} \end{pmatrix}$$

Eks.

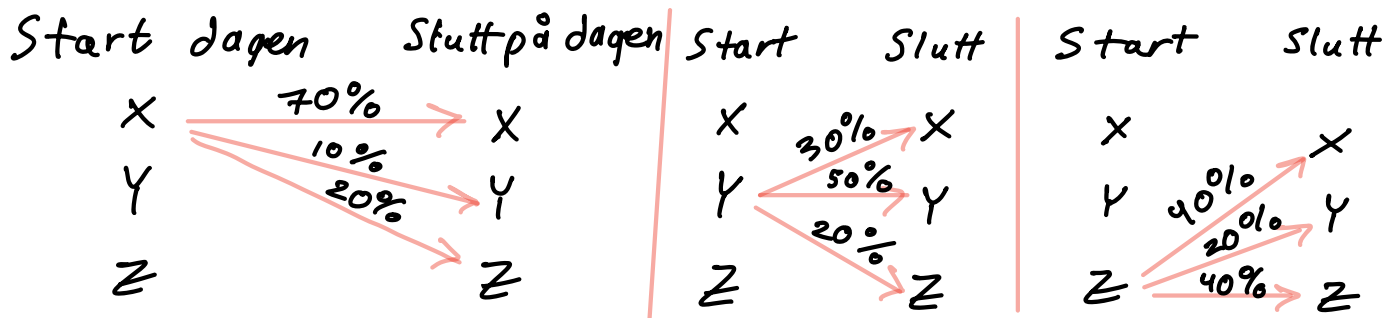
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2 & 2+3 & 4+1 \\ 0+2 & -1-2 & 3+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 5 \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

Transponere en matrise: Bytte om på rader og søyler.
radvektor $\leftrightarrow$ søylevektor

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

skriver dette for transponerte

Eksempel 1.5.4 kjøpesenter med 3 stativer X, Y, Z for handlevognen.



Vi starter dagen med x vogner i X, y i Y, z i Z
Hvor mange vogner er det i X, Y, Z på slutten av dagen?
hvis $x=100, y=70, z=30$:

i X: $0.7x + 0.3y + 0.4z = 0.7 \cdot 100 + 0.3 \cdot 70 + 0.4 \cdot 30 = 103$

i Y: $0.1x + 0.5y + 0.2z = 0.1 \cdot 100 + 0.5 \cdot 70 + 0.2 \cdot 30 = 51$

i Z: $0.2x + 0.2y + 0.4z = 0.2 \cdot 100 + 0.2 \cdot 70 + 0.4 \cdot 30 = 46$

Definisjon: Hvis A er en $m \times n$ -matrise, og $\vec{x}$ er en søylevektor med n komponenter, så definerer vi produktet av A og $\vec{x}$, skrevet

$$A\vec{x}, \text{ eller } \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Som vektoren

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix} \quad (m \text{ komponenter})$$

$$\text{Over: } \begin{pmatrix} 103 \\ 51 \\ 46 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 & 0.4 \\ 0.1 & 0.5 & 0.2 \\ 0.2 & 0.2 & 0.4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 \\ 70 \\ 30 \end{pmatrix}$$

kalles for matrise-vektor produktet.