

Seksjon 1.5 forts

Eksempel Med $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$A\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 4 \cdot 0 \\ 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 + 2 + 0 \\ 0 + 1 + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

som er andre søyle i A .

Mer generelt: $A\vec{e}_i = i\text{'te søyle i } A$.

$$(0, \dots, 0, \underbrace{1}_{\text{plass } i}, 0, \dots, 0)$$

1.6 Multiplikasjon av matriser

La A være en $m \times n$ -matrise, B en $n \times p$ -matrise.

Produktet av A og B , skrevet AB , er

$m \times p$ -matrisen C med komponenter C_{ij} , der

$$C_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}$$

Skalarprodukt av rad i i A , og søyle j i B .

$$\text{rad } i: \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}$$

$A \qquad B$

Eksempel:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 + 4 \cdot (-1) + 1 \cdot 3 & 2 \cdot 1 + 4 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \\ (-1) \cdot 2 + 2 \cdot (-1) + 0 \cdot 3 & (-1) \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 0 \cdot 2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 4 - 4 + 3 & 2 + 4 + 2 \\ -2 - 2 + 0 & -1 + 2 + 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) & 2 \cdot 4 + 1 \cdot 2 & 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \\ (-1) \cdot 2 + 1 \cdot (-1) & (-1) \cdot 4 + 1 \cdot 2 & (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 0 \\ 3 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) & 3 \cdot 4 + 2 \cdot 2 & 3 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \end{pmatrix} \\
 = \begin{pmatrix} 4-1 & 8+2 & 2+0 \\ -2-1 & -4+2 & -1+0 \\ 6-2 & 12+4 & 3+0 \end{pmatrix} \\
 = \begin{pmatrix} 3 & 10 & 2 \\ -3 & -2 & -1 \\ 4 & 16 & 3 \end{pmatrix}$$

Vi fikk en 3×3 -matrise

Så, $AB \neq BA$!

Setning:

- (i): $(AB)C = A(BC)$
- (ii): $A(B+C) = AB + AC$
- (iii): ...
- (iv): $s(AB) = (sA)B = A(sB)$
- (v): $(AB)^T = B^T A^T$

Forutsetter at dimensjonene til A, B, C "matcher"

Beweis for (i):

$$\begin{aligned}
 ((AB)C)_{ij} &= \sum_{k=1}^p (AB)_{ik} C_{kj} = \sum_k \left(\sum_{r=1}^n a_{ir} b_{rk} \right) C_{kj} = \sum_{k,r} a_{ir} b_{rk} C_{kj} \\
 (A(BC))_{ij} &= \sum_r a_{ir} (BC)_{rj} = \sum_r a_{ir} \left(\sum_k b_{rk} C_{kj} \right) = \sum_{r,k} a_{ir} b_{rk} C_{kj}
 \end{aligned}$$

Derfor har $(AB)C$ og $A(BC)$ like komponenter, slik at

$$(AB)C = A(BC).$$

Beweis for (v): Nok å vise at

$$\underbrace{((AB)^T)_{ij}}_{(AB)_{ji}} = \underbrace{(B^T A^T)_{ij}}_{\text{skalarprodukt av rad } i \text{ i } B^T \text{ med søyle } j \text{ i } A^T} \text{ for alle } i, j.$$

skalarprodukt av rad j i A ,
spøyle i i B

skalarprodukt av spøyle i i B
med rad j i A

$$\vec{a}_j \cdot \vec{b}_i$$

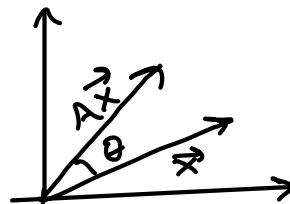
$$\vec{b}_i \cdot \vec{a}_j$$

Like for reelle vektorer. ■

Rotasjonsmatriser

Se på $A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$

La $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$. Vi viser at multiplikasjon med A roterer $\vec{x}$ med vinkel θ , mot klokke.



Skriv $\vec{x} = \begin{pmatrix} r \cos \phi \\ r \sin \phi \end{pmatrix}$ (polarform)

$$\begin{aligned} A\vec{x} &= \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \cos \phi \\ r \sin \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \theta \cos \phi - r \sin \theta \sin \phi \\ r \sin \theta \cos \phi + r \cos \theta \sin \phi \end{pmatrix} \\ &= r \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \phi - \sin \theta \sin \phi \\ \sin \theta \cos \phi + \cos \theta \sin \phi \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$= r \begin{pmatrix} \cos(\theta + \phi) \\ \sin(\theta + \phi) \end{pmatrix}, \text{ som svarer til } \vec{x} \text{ rotert med } \theta.$$

Spesielt svarer rotasjon først med θ_2 , så med θ_1 ,

til matrisen med vinkel $\theta_1 + \theta_2$:

$$\begin{pmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_1 + \theta_2) & -\sin(\theta_1 + \theta_2) \\ \sin(\theta_1 + \theta_2) & \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{pmatrix}$$

1.7 Identitetsmatriser / inverse matriser

For reelle tall: $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$.

Anta A $n \times n$. Finnes det en matrise I_n s.a. $A I_n = I_n A = A$?

Ja!
$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

enere på diagonalen, nuller ellers
kalles I_n ($n \times n$ identitetsmatrisen).

For reelle tall $\neq 0$: $\frac{1}{a} \cdot a = a \cdot \frac{1}{a} = 1$.

Finnes det en matrise X s.a. $XA = AX = I_n$?

I så fall sier vi at A er inverterbar med invers X .

Vi skriver også A^{-1} for X .

En $n \times n$ -matrise kan bare ha en invers:

Hvis X og Y begge er inverser til A :

$$X = X I_n = X (A Y) = (X A) Y = I_n Y = Y$$

Derfor er $X=Y$, slik at det bare kan være en invers.

AB er inverterbar hvis A og B er inverterbare:

La A^{-1}, B^{-1} være inverser til A, B .

$$\begin{aligned} (AB)(B^{-1}A^{-1}) &= A(BB^{-1})A^{-1} = A I_n A^{-1} = AA^{-1} = I_n \\ (B^{-1}A^{-1})AB &= \dots \dots \dots \dots = I_n \end{aligned}$$

Derfor er $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Vi har også at $(A^{-1})^{-1} = A$ når A er inverterbar,

siden $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$

Ek2 Finn inversmatrisen til $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$, hvis den finnes.

Løsning: $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(1) $3x_{11} + 4x_{21} = 1$

$3x_{12} + 4x_{22} = 0 \rightarrow x_{22} = -\frac{3}{4}x_{12}$

$5x_{11} + 7x_{21} = 0 \rightarrow x_{21} = -\frac{5}{7}x_{11}$

(2) $5x_{12} + 7x_{22} = 1$

sett inn i (1)

$3x_{11} + 4 \cdot \left(-\frac{5}{7}x_{11}\right) = 1$

$\left(3 - \frac{20}{7}\right)x_{11} = 1 \Rightarrow x_{11} = 7$

$x_{21} = -\frac{5}{7} \cdot 7 = -5$

sett inn i (2)

$5x_{12} + 7 \cdot \left(-\frac{3}{4}x_{12}\right) = 1 \Rightarrow \left(5 - \frac{21}{4}\right)x_{12} = 1$

$x_{12} = -4$

$x_{22} = -\frac{3}{4}x_{12} = 3$

Derfor: $A^{-1} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$

Notasjon: Vi skriver A^n for matrisen $\underbrace{AA \cdots A}_{n \text{ ganger}}$.

Hvis A er inverterbar er også A^n inverterbar, og

$(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$, siden $\underbrace{A \cdots A}_{n \text{ ganger}} \cdot \underbrace{A^{-1} \cdots A^{-1}}_{n \text{ ganger}} = A \cdots A I_n \bar{A} \cdots \bar{A} = \cdots = I_n$