

Sek 1.4/1.8 : Vektorproduktet / determinanter

En 2×2 determinant: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \underline{ad - bc}$$

En 3×3 determinant: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

$$\det(A) = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Eksempler:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 - 2 \cdot 4 = 3 - 8 = \underline{\underline{-5}}$$

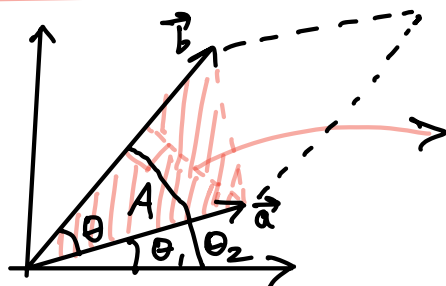
$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 3 & 8 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + 7 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$$
$$= 1 \cdot (9 - 16) - 4(6 + 8) + 7(4 + 3)$$
$$= -7 - 56 + 49 = \underline{\underline{-14}}$$

Setning: Arealet av parallelogrammet utspont av $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er

$$|\det(\vec{a}, \vec{b})|$$

matrisen med $\vec{a}$ og $\vec{b}$ som søyler

Beris:



$$|\vec{a}| \sin \theta$$

$$A = \underbrace{\frac{1}{2} |\vec{b}|}_{\text{grunnflate}} \underbrace{|\vec{a}| \sin \theta}_{\text{høyde}}$$

$$\text{Areall av hele: } |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta$$

$$\begin{aligned}
 |\det(\vec{a}, \vec{b})| &= \left| \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \right| = \left| \begin{vmatrix} |\vec{a}| \cos \theta_1 & |\vec{b}| \cos \theta_2 \\ |\vec{a}| \sin \theta_1 & |\vec{b}| \sin \theta_2 \end{vmatrix} \right| \\
 &= \left| |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta_1 \sin \theta_2 - |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta_1 \cos \theta_2 \right| \\
 &= |\vec{a}| |\vec{b}| \left| (\cos \theta_1 \sin \theta_2 - \sin \theta_1 \cos \theta_2) \right| \\
 &= |\vec{a}| |\vec{b}| |\sin(\theta_2 - \theta_1)| = |\vec{a}| |\vec{b}| |\sin \theta|
 \end{aligned}$$

Vektorproduktet av $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, og $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ er definert ved $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \quad \begin{aligned} \vec{e}_1 &= (1, 0, 0) \\ \vec{e}_2 &= (0, 1, 0) \\ \vec{e}_3 &= (0, 0, 1) \end{aligned}$$

$$= \underbrace{(a_2 b_3 - a_3 b_2)}_{\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}} \vec{e}_1 - (a_1 b_3 - a_3 b_1) \vec{e}_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \vec{e}_3$$

Eksempel: Med $\vec{a} = (2, 4, 1)$, $\vec{b} = (3, 0, 2)$:

$$\begin{aligned}
 \vec{a} \times \vec{b} &= \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (4 \cdot 2 - 1 \cdot 0) \vec{e}_1 - (2 \cdot 2 - 1 \cdot 3) \vec{e}_2 + (2 \cdot 0 - 4 \cdot 3) \vec{e}_3 \\
 &= 8 \vec{e}_1 - \vec{e}_2 - 12 \vec{e}_3 = (8, -1, -12)
 \end{aligned}$$

Setning For $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ har vi

- (i) $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$
- (ii) $\vec{a} \times \vec{b}$ står normalt på både $\vec{a}$ og $\vec{b}$
- (iii) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \times \vec{b}$ tilfredsstiller høyrehåndsgregelen
- (iv) $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta = \text{arealet til parallelogrammet utspant av } \vec{a} \text{ og } \vec{b}$

(v) $|\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})| = \text{volumet til parallelepipedet utspent av } \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$

Beris (i) : $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \vec{c} - \dots$

$$\vec{b} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix} \vec{c} - \dots$$

samme verdi, men motsatt fortegn.

$$b_2 a_3 - b_3 a_2 = -(a_2 b_3 - a_3 b_2)$$

(iv): Følger fra Lagranges identitet:

$$\begin{aligned} |\vec{a} \times \vec{b}|^2 &= |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - |\vec{a} \cdot \vec{b}|^2 && \text{vinkel mellom } \vec{a} \text{ og } \vec{b} \\ &= |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 \cos^2 \theta \\ &= |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 (1 - \cos^2 \theta) \\ &= |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 \sin^2 \theta \end{aligned}$$

Ta kvadratrøtter: $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| |\sin \theta| = \text{areal parallelogram utspent av de to.}$

1.9 Lineære avbildninger

$T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ kalles en lineær avbildning hvis, for alle $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$, og $c \in \mathbb{R}$, har at

(i) $T(c\vec{x}) = c T(\vec{x})$

(ii) $T(\vec{x} + \vec{y}) = T\vec{x} + T\vec{y}$.

Hvis A er $m \times n$ så er $T(\vec{x}) = A\vec{x}$ en lineær avbildning siden

$$T(c\vec{x}) = A(c\vec{x}) = c A\vec{x} = c T(\vec{x})$$

$$T(\vec{x} + \vec{y}) = A(\vec{x} + \vec{y}) = A\vec{x} + A\vec{y} = T(\vec{x}) + T(\vec{y})$$

Setning: Hvis T er lineær finnes en unik matrise A slik at $T(\vec{x}) = A\vec{x}$ for alle $\vec{x}$

Beris: Anta T er lineær. Da er

$$\begin{aligned} T(\vec{x}) &= T(x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + \dots + x_n \vec{e}_n) \\ &= x_1 T(\vec{e}_1) + x_2 T(\vec{e}_2) + \dots + x_n T(\vec{e}_n) \\ &= \begin{pmatrix} T(\vec{e}_1) & T(\vec{e}_2) & \dots & T(\vec{e}_n) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\ &= A\vec{x} \quad \text{med} \quad A = (T(\vec{e}_1) \dots T(\vec{e}_n)). \end{aligned}$$

Hvorfor er A unik?

Hvis $T(\vec{x}) = A\vec{x}$ så er $T(\vec{e}_j) = A\vec{e}_j$
= søyle j i A ,
s.a. A må være lik $(T(\vec{e}_1) \dots T(\vec{e}_n))$. ■

Eigenverdier:

Hvis T er lineær sier vi at λ er en eigenverdi for T hvis det finnes en vektor $\vec{x} \neq 0$ s.a. $T(\vec{x}) = \lambda\vec{x}$.
Da kalles $\vec{x}$ for en tilhørende eigenvektor.
(må ha $m=n$ spesielt).

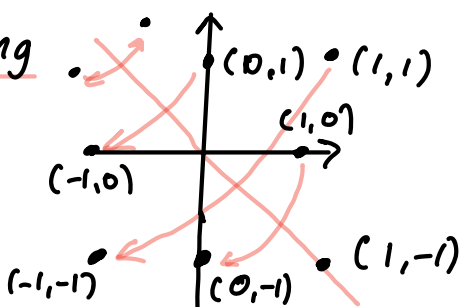
Merk at: $\underbrace{A \dots A}_{n \text{ ganger}} \vec{x} = A \dots A \lambda \vec{x} = \lambda A \dots A \vec{x} = \dots = \lambda^n \vec{x}$,

så $A^n \vec{x} = \lambda^n \vec{x}$

Eks: La T være avbildningen som speiler om linja
 $y = -x$ i $\mathbb{R}^2$.
Hva er eigenvektorer/verdier for T ?

Hva er matrisen til T ?

Løsning



Vi har: $T(\vec{e}_1) = -\vec{e}_2$
 $T(\vec{e}_2) = -\vec{e}_1 \Rightarrow$ matrisen for T er $\begin{pmatrix} -\vec{e}_2 & -\vec{e}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Egenverdier: Vi ser at $T(1, -1) = (1, -1)$

$A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda = 1$ er egenverdi,
og $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ er tilhørende egenvektor.

Vi ser og: $T(1, 1) = (-1, -1)$

$A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda = -1$ er egenverdi,
og $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ er tilhørende egenvektor.

Bevis for at $|\det(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})|$ er lik volumet til
parallelepipedet utspent av $\vec{a}$, $\vec{b}$, og $\vec{c}$:

$$\begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = c_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - c_2 \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + c_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$
$$= (c_1, c_2, c_3) \cdot \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right)$$

$$= \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$$

projeksjonen av $\vec{c}$ ned på $\vec{a} \times \vec{b}$ er $\frac{\vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})}{|\vec{a} \times \vec{b}|^2} \vec{a} \times \vec{b}$,

som har lengde $\frac{|\vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})|}{|\vec{a} \times \vec{b}|}$

$\vec{a} \times \vec{b}$
 høyde
 $= |\text{proj}_{\vec{a} \times \vec{b}} \vec{c}|$
 planet/grunnflaten utspent av $\vec{a}, \vec{b}$, sett fra siden
 grunnflate høyde

$$\text{Volum} = \text{grunnflate} \cdot \text{høyde} = |\vec{a} \times \vec{b}| \frac{|\vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})|}{|\vec{a} \times \vec{b}|} = |\vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})|$$