

1.10 Affinavbildninger

$\vec{F}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ kalles en affinavbildning dersom det fins en $m \times n$ -matrise A , og $\vec{c} \in \mathbb{R}^m$ s.a.

$$\vec{F}(\vec{x}) = A\vec{x} + \vec{c}$$

matrisen til $\vec{F}$ konstantleddet.

Eks: Linjer i planet ($y = ax + b$) er affine avbildninger
konstantledd

Translasjon: $\vec{F}(\vec{x}) = \vec{x} + \vec{a}$

Rotasjon med vinkel θ om et punkt $\vec{p}$ i planet:
rotasjonsmatrise.

$$\begin{aligned}\vec{x} &\rightarrow \vec{x} - \vec{p} \rightarrow A_\theta(\vec{x} - \vec{p}) \rightarrow A_\theta(\vec{x} - \vec{p}) + \vec{p} \\ &= A_\theta \vec{x} + \underbrace{\vec{p} - A_\theta \vec{p}}_{\text{konstantledd}}\end{aligned}$$

Setning: Hvis $\vec{F}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ er affin, og L er en linje i $\mathbb{R}^n$, så er bildet av L under $\vec{F}$ også en linje/punkt

Bevis: Linja kan skrives som $\vec{r}(t) = t\vec{a} + \vec{b}$

$$\vec{F}(\vec{r}(t)) = A\vec{r}(t) + \vec{c}$$

$$= A(t\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$$

$$= t \underbrace{A\vec{a}}_{\text{retningsvektor}} + \underbrace{A\vec{b} + \vec{c}}_{\text{punkt}}, \text{ som er en linje i } \mathbb{R}^m$$

2.6 Derivasjon av vektorvaluerte funksjoner

Anta $A \subset \mathbb{R}^n$, og $\vec{F}: A \rightarrow \mathbb{R}^m$. Vi skriver $F_i(\vec{x})$ for komponentene til $\vec{F}$:

$$\vec{F}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} F_1(\vec{x}) \\ F_2(\vec{x}) \\ \vdots \\ F_m(\vec{x}) \end{pmatrix}$$

Vi antar: Alle F_i deriverbare i $\vec{a}$ (spesielt: partielle deriverte eksisterer, $\vec{a}$ indre punkt)

Jacobimatrisen til $\vec{F}$ i $\vec{a}$ er

$$\vec{F}'(\vec{a}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(\vec{a}) & \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(\vec{a}) & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(\vec{a}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1}(\vec{a}) & \frac{\partial F_m}{\partial x_2}(\vec{a}) & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n}(\vec{a}) \end{pmatrix} \begin{matrix} x_1 & x_2 \\ \downarrow & \downarrow \\ x & y \end{matrix}$$

gradient til F_1
gradient til F_m

Eksempel: Jacobimatrisen til $\vec{F}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^3 y^4 \\ x^2 y \end{pmatrix}$ i punktet $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$:

$$F_1(x, y) = x^3 y^4$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} = 3x^2 y^4 \quad \frac{\partial F_1}{\partial y} = 4x^3 y^3$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial x}(\vec{a}) = 48 \quad \frac{\partial F_1}{\partial y}(\vec{a}) = 32$$

$$F_2(x, y) = x^2 y$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = 2xy \quad \frac{\partial F_2}{\partial y} = x^2$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x}(\vec{a}) = 4 \quad \frac{\partial F_2}{\partial y}(\vec{a}) = 1$$

$$\text{Derfor er } \vec{F}'(\vec{a}) = \begin{pmatrix} 48 & 32 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Definisjon: $\vec{F}: A \rightarrow \mathbb{R}^m$ kalles deriverbar i $\vec{a}$ dersom $\vec{F}'(\vec{a})$ eksisterer, og

$$\vec{o}(\vec{r}) = \vec{F}(\vec{a} + \vec{r}) - \vec{F}(\vec{a}) - \vec{F}'(\vec{a}) \vec{r}$$

tilfredsstiller

$$\lim_{\vec{r} \rightarrow \vec{0}} \frac{\vec{o}(\vec{r})}{|\vec{r}|} = \vec{0}$$

Setning: $\vec{F}$ er deriverbar i $\vec{a} \in A$ hvis og bare hvis alle komponentene $F_1, \dots, F_m$ er deriverbare i $\vec{a}$

Bevis: $\vec{\sigma}(\vec{r}) = \begin{pmatrix} \sigma_1(\vec{r}) \\ \vdots \\ \sigma_m(\vec{r}) \end{pmatrix}$ der $\sigma_i(\vec{r}) = F_i(\vec{a} + \vec{r}) - F_i(\vec{a}) - \nabla F_i(\vec{a}) \vec{r}$

$\vec{F}$ deriverbar i $\vec{a}$

$\Downarrow$

$$\lim_{\vec{r} \rightarrow \vec{0}} \frac{\vec{\sigma}(\vec{r})}{|\vec{r}|} = \vec{0}$$

$\Downarrow$

$$\lim_{\vec{r} \rightarrow \vec{0}} \frac{\sigma_i(\vec{r})}{|\vec{r}|} = 0 \quad \text{alle } i$$

$\Downarrow$

F_i er deriverbar i $\vec{a}$ for alle i ■

Korollar: Hvis alle de partielle deriverte $\frac{\partial F_i}{\partial x_j}$ er definert i en omegn om $\vec{a}$, og er kontinuerlige i $\vec{a}$, så er $\vec{F}$ deriverbar i $\vec{a}$

Bevis: partielle deriverte eksisterer, og er kont. i omegn om $\vec{a}$

$\Downarrow$

∇F_i er kont. i omegn om $\vec{a}$, alle i

$\Downarrow$

F_i deriverbar i $\vec{a}$

$\Downarrow$

$\vec{F}$ er deriverbar i $\vec{a}$ ■

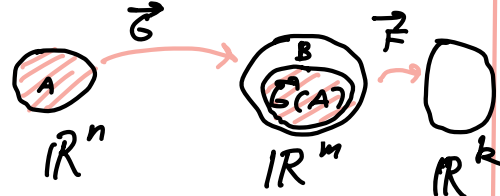
Spesielt er $\vec{F}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^3 y^4 \\ x^2 y \end{pmatrix}$ er deriverbar, siden partielle deriverte er kont.

2.7 Kjernerregelen

Kjernerregelen for $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$: $h(x) = f(g(x))$ har derivert
 $h'(x) = f'(g(x)) g'(x)$

Teorem: Kjernerregelen på matriseform

Anta $A \subset \mathbb{R}^n$, $B \subset \mathbb{R}^m$ og $\vec{G}: A \rightarrow B$, $\vec{F}: B \rightarrow \mathbb{R}^k$



Dersom $\vec{G}$ er deriverbar i $\vec{a} \in A$,
 $\vec{F}$ er deriverbar i $\vec{b} = \vec{G}(\vec{a})$

så er den sammensatte funksjonen $\vec{H}(\vec{x}) = \vec{F}(\vec{G}(\vec{x}))$
deriverbar i $\vec{a}$, med Jacobimatrise

$$\vec{H}'(\vec{a}) = \underbrace{\vec{F}'(\vec{G}(\vec{a}))}_{\text{to Jacobimatriser}} \underbrace{\vec{G}'(\vec{a})}_{\text{to Jacobimatriser}}$$

Spesialtilfelle:

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{\vec{G}} \mathbb{R}^m \xrightarrow{f} \mathbb{R} \quad (k=1, f=\vec{F})$$

h

$h(\vec{x}) = f(\vec{G}(\vec{x}))$

$$h'(\vec{a}) = f'(\vec{G}(\vec{a})) \vec{G}'(\vec{a})$$

$$\nabla h(\vec{a}) = \nabla f(\vec{G}(\vec{a})) \vec{G}'(\vec{a})$$

$$\underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}} \left(\right)$$

Sier at

$$\frac{\partial h}{\partial x_j}(\vec{a}) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{G}(\vec{a})) \frac{\partial G_i}{\partial x_j}(\vec{a})$$

Eksempel: $\vec{F}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^3 y^4 \\ x^2 y \end{pmatrix}$ $\vec{G}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2 \\ y^2 \end{pmatrix}$
 Regn ud $\vec{H}'\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ der $\vec{H}(\vec{x}) = \vec{F}(\vec{G}(\vec{x}))$

Løsning:

$$\vec{G}(\vec{a}) = \vec{G}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+2 \\ 1^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{G}'\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2y \end{pmatrix} \quad \vec{G}'\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{F}'\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x^2 y^4 & 4x^3 y^3 \\ 2xy & x^2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{F}'(\vec{G}(\vec{a})) = \begin{pmatrix} 3 \cdot 4^2 \cdot 1^4 & 4 \cdot 4^3 \cdot 1^3 \\ 8 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 48 & 256 \\ 8 & 16 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \vec{H}'\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} &= \vec{F}'(\vec{G}(\vec{a})) \vec{G}'(\vec{a}) \\ &= \begin{pmatrix} 48 & 256 \\ 8 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 48 & 512 \\ 8 & 32 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Eksempel: $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x^3 y^4$ $\vec{G}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2 \\ y^2 \end{pmatrix}$
 $\nabla f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x^2 y^4 & 4x^3 y^3 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \nabla h\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} &= \nabla f\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \vec{G}'\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 48 & 256 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 48 & 512 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2.8 Linearisering

La $\vec{F}(\vec{x}) = A\vec{x} + \vec{c}$ være en affin afbildning

Komponentene til $\vec{F}$: $F_i(\vec{x}) = (A\vec{x})_i + c_i$
 $= \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + c_i$

Siden $\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = a_{ij}$, så $\vec{F}$ er deriverbar i alle punkter,
og $\vec{F}'(\vec{x}) = A$ for alle $\vec{x}$.

Definisjon: Anta $\vec{F}: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ er deriverbar i $\vec{a}$.

Funksjonen $\vec{T}_{\vec{a}}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ definert ved

$$\vec{T}_{\vec{a}}(\vec{x}) = \vec{F}(\vec{a}) + \vec{F}'(\vec{a})(\vec{x} - \vec{a})$$

kalles for lineariseringen til $\vec{F}$ i $\vec{a}$

Merk: Både $\vec{T}_{\vec{a}}$ og $\vec{F}$ har $\vec{F}'(\vec{a})$ som Jacobimatrise,
og $\vec{T}_{\vec{a}}(\vec{a}) = \vec{F}(\vec{a})$.

Derfor: $\vec{T}_{\vec{a}}$ er en god tilnærming til $\vec{F}$, siden de har
samme verdi i $\vec{a}$, og samme Jacobimatrise i $\vec{a}$.

Setning: Anta $\vec{F}: A \rightarrow \mathbb{R}^m$ er deriverbar i $\vec{a}$. Da er

$$\lim_{\vec{r} \rightarrow \vec{0}} \frac{1}{\|\vec{r}\|} (\underbrace{\vec{F}(\vec{a} + \vec{r}) - \vec{T}_{\vec{a}}(\vec{a} + \vec{r})}_{\text{Ta god tilnærming til } \vec{F}}) = \vec{0}$$

$\vec{T}_{\vec{a}}$ er den eneste affinaubildningen som tilfredsstiller dette.