

3.1 Parametriserte kurver

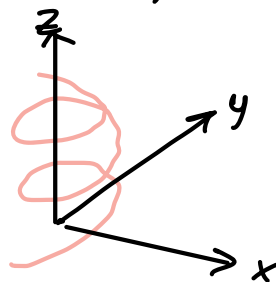
En parametrisert kurve i $\mathbb{R}^n$ er en kontinuerlig funksjon

$\vec{r}: I \rightarrow \mathbb{R}^n$, der $I \subset \mathbb{R}$ er et intervall:

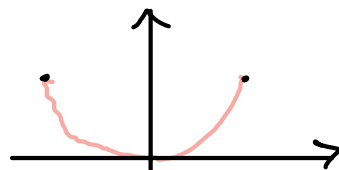
$$\vec{r}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$$

komponenter

Eks: En spiral i $\mathbb{R}^3$: $\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, t)$ $0 \leq t \leq 6\pi$
/fjor



Eks: En parabel i $\mathbb{R}^2$: $\vec{r}(t) = (t, t^2)$, $-1 \leq t \leq 1$



Definisjon: Hastigheten til $\vec{r}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ er

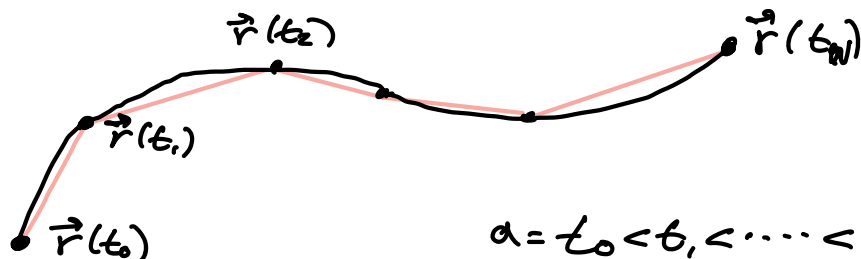
$$\vec{v}(t) = \vec{r}'(t) = (x_1'(t), \dots, x_n'(t))$$

Akselerasjon til $\vec{r}(t)$ er

$$\vec{a}(t) = \vec{v}'(t)$$

Spørsmål: Hva er lengden til en parametrisert kurve $\vec{r}: I \rightarrow \mathbb{R}^n$?
(antar x_i' ene er kontinuerlig deriverbare).

Splitt opp kurven i små deler, tilnærm med rette linjer på hver del:



Lengden på hver rette linje:

$$\begin{aligned} |\vec{r}(t_i) - \vec{r}(t_{i-1})| &= \sqrt{(x_1(t_i) - x_1(t_{i-1}))^2 + \dots + (x_n(t_i) - x_n(t_{i-1}))^2} \\ &= (t_i - t_{i-1}) \sqrt{\left(\frac{x_1(t_i) - x_1(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}}\right)^2 + \dots + \left(\frac{x_n(t_i) - x_n(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}}\right)^2} \\ &\approx (t_i - t_{i-1}) \sqrt{x_1'(t_i)^2 + \dots + x_n'(t_i)^2} \\ &\quad |\vec{r}'(t_i)|^2 = |\vec{v}(t_i)|^2 \\ &= (t_i - t_{i-1}) |\vec{v}(t_i)| \end{aligned}$$

Lengden på hele kurven $\approx \sum_{i=1}^N (t_i - t_{i-1}) |\vec{v}(t_i)|$,

som er en Riemannsum for integralet $\int_a^b |\vec{v}(t)| dt$

$$\begin{aligned} a &= t_0 \\ b &= t_N \end{aligned}$$

$$L(a, b) = \int_a^b |\vec{v}(t)| dt = \int_a^b \sqrt{x_1'(t)^2 + \dots + x_n'(t)^2} dt \quad \text{kalles buelengden til } \vec{r}.$$

Eks. Buelengden til spiralen $\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, t)$ $0 \leq t \leq 6\pi$

$$\begin{aligned} |\vec{v}(t)| &= \sqrt{x_1'(t)^2 + x_2'(t)^2 + x_3'(t)^2} = \sqrt{(-\sin t)^2 + \cos^2 t + 1^2} \\ &= \sqrt{1 + \sin^2 t + \cos^2 t} = \sqrt{2} \end{aligned}$$

$$L(0, 6\pi) = \int_0^{6\pi} \sqrt{2} dt = 6\pi\sqrt{2}$$

Spørsmål: Hva er farten langs $\vec{r}: I \rightarrow \mathbb{R}^n$?

Hvis $a, t \in I$, $a < t$:

Tilbakelagt strekning ved tid t er

$$s(t) = \int_a^t |\vec{v}(t)| dt$$

Farten til kurven ved tid t er

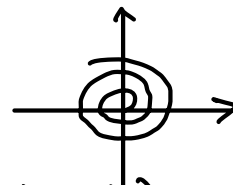
$$v(t) := s'(t) = |\vec{v}(t)|$$

Spørsmål: Hva er akselerasjonen langs $\vec{r}$?

Dette er $a(t) = v'(t)$, og kalles baneakselerasjonen.

Eksempel 3.1.9

$$\vec{r}(t) = (t \cos t, t \sin t)$$



hastighet: $\vec{v}(t) = (\cos t - t \sin t, \sin t + t \cos t)$

akselerasjon: $\vec{a}(t) = (-2 \sin t - t \cos t, 2 \cos t - t \sin t)$

fart:
$$v(t) = |\vec{v}(t)| = \sqrt{(\cos t - t \sin t)^2 + (\sin t + t \cos t)^2}$$
$$= \sqrt{\cos^2 t + \underline{\underline{t^2 \sin^2 t}} - \underline{\underline{2t \cos t \sin t}} + \underline{\underline{\sin^2 t}} + \underline{\underline{t^2 \cos^2 t}} + \underline{\underline{2t \cos t \sin t}}}$$
$$= \sqrt{1 + t^2}$$

baneakselerasjon: $a(t) = v'(t) = \frac{2t}{2\sqrt{1+t^2}} = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$

Setning: Egenskaper ved parametriserte kurver

Dersom $\vec{r}_1$ og $\vec{r}_2$ er parametriserte kurver, og $u: I \rightarrow \mathbb{R}$ er en funksjon (alle deriverbare)

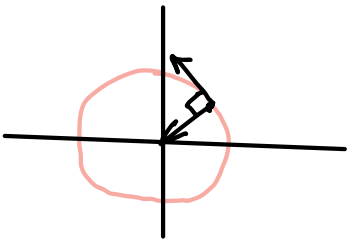
- (i) $(\vec{r}_1(t) + \vec{r}_2(t))' = \vec{r}_1'(t) + \vec{r}_2'(t)$
- (ii) $(\vec{r}_1(t) \cdot \vec{r}_2(t))' = \vec{r}_1'(t) \cdot \vec{r}_2(t) + \vec{r}_1(t) \cdot \vec{r}_2'(t)$
- (iii) $(\vec{r}_1(t) \times \vec{r}_2(t))' = \vec{r}_1'(t) \times \vec{r}_2(t) + \vec{r}_1(t) \times \vec{r}_2'(t)$
- (iv) $(u(t) \vec{r}(t))' = u'(t) \vec{r}(t) + u(t) \vec{r}'(t)$

Setning: Dersom $|\vec{r}(t)|$ er konstant så er $\vec{r}(t)$ og $\vec{r}'(t)$ ortogonale.

Bevis: $0 = (|\vec{r}(t)|^2)' = (\vec{r}(t) \cdot \vec{r}(t))' = \vec{r}'(t) \cdot \vec{r}(t) + \vec{r}(t) \cdot \vec{r}'(t)$
 $= 2 \vec{r}(t) \cdot \vec{r}'(t)$

$|\vec{r}(t)|^2 = \text{const}$

$(|\vec{r}(t)|^2)' = 0$ slik at $\vec{r}(t)$ og $\vec{v}(t) = \vec{r}'(t)$ er ortogonale



Sett $\vec{T}(t) = \frac{\vec{v}(t)}{v(t)}$, som har lengde 1

$$\vec{v}(t) = v(t) \vec{T}(t)$$

Deriver: $\vec{a}(t) = \underbrace{v'(t)}_{a(t)} \vec{T}(t) + v(t) \underbrace{\vec{T}'(t)}_{\text{ortogonal p\aa } \vec{T}(t), \text{ siden } |\vec{T}(t)| \text{ er konstant.}}$

Setning: $\vec{a}(t) = a(t) \vec{T}(t) + v(t) \vec{T}'(t)$

er en dekomposisjon av akselerasjonsvektoren i to retninger: En i fartsretningen, og en ortogonal p\aa denne