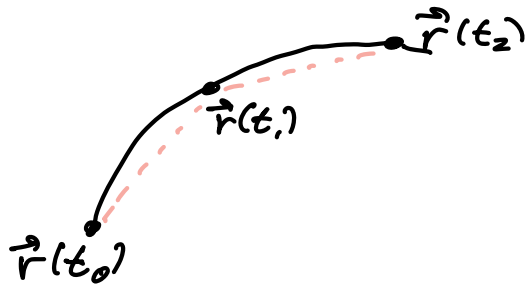


Seksjon 3.3: Linjeintegraler for skalarfelt

Anta en tråd har tetthet $f(\vec{x})$ (= masse/lengdeenhet) i punktet $\vec{x}$.

Spørsmål: Hvor mye veier tråden?



En del veier $\approx |\vec{r}(t_i) - \vec{r}(t_{i-1})| \cdot f(\vec{r}(t_i))$

som før: Får en Riemannsum for massen

$$\int_a^b f(\vec{r}(t)) v(t) dt$$

Vi skriver $\int_C f ds$ for denne, kalles linjeintegral av skalarfelt

Krever at: $\vec{r}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ er en stykkevis glatt parametrisering

betyr: 1. $\vec{r}$ er kontinuerlig.

2. Fins en oppdeling $a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b$ s.o.
 $\vec{r}'(t)$ er kont. på hvert delintervall (t_{i-1}, t_i)

Regler: (i)
$$\begin{aligned} \int_C (f+g) ds &= \int_a^b (f+g)(\vec{r}(t)) v(t) dt \\ &= \int_a^b (f(\vec{r}(t))v(t) + g(\vec{r}(t))v(t)) dt \\ &= \dots = \int_C f ds + \int_C g ds \end{aligned}$$

(ii) Hvis C_i er kurven $[t_{i-1}, t_i] \rightarrow \mathbb{R}^n$ så er

$$\int_C f ds = \int_{C_1} f ds + \dots + \int_{C_N} f ds$$

(iii) $\int_C f ds$ er uavhengig av parametriseringen:

Anta $\vec{r}_1: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\vec{r}_2: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$ er stykkevis, glatte par.

slik at $\vec{r}_2(\phi(t)) = \vec{r}_1(t)$ for $t \in [a, b]$, for en "pen" ϕ , med
betyr at $\vec{r}_1$ og $\vec{r}_2$ løper gjennom ϕ verdien $[c, d]$
samme kurve. kont. deriverbar, $\phi' \neq 0$

$$\text{Da er } \int_a^b f(\vec{r}_1(t)) v_1(t) dt = \int_c^d f(\vec{r}_2(t)) v_2(t) dt$$

ϕ voksende: $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ løper gjennom kurven i samme retning
(samme orientering)

ϕ avtagende: ---||--- motsatt retning (motsatt orientering)

Bevis: $v_1(t) = \vec{r}_1'(t) = (\vec{r}_2(\phi(t)))' = r_2'(\phi(t)) \phi'(t) \Rightarrow v_1(t) = v_2(\phi(t)) \phi'(t)$
lengde

$$\begin{aligned} &= \int_a^b f(\vec{r}_2(\phi(t)) v_2(\phi(t)) \phi'(t) dt \\ &\quad u = \phi(t), \quad du = \phi'(t) dt \\ &= \int_c^d f(\vec{r}_2(u)) v_2(u) du \quad u \leftrightarrow t \end{aligned}$$

Eksempel: Sett $f(x, y, z) = xy$, $\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, t)$ $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$

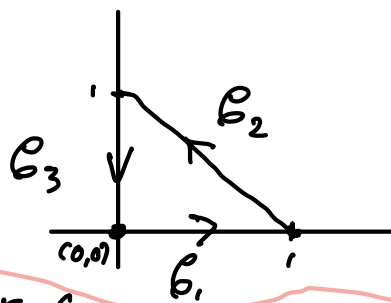
Hva blir $\int_C f ds$?

Løsning:

$$\begin{aligned} \vec{v}(t) &= (-\sin t, \cos t, 1) \\ v(t) &= \sqrt{(-\sin t)^2 + \cos^2 t + 1} = \sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_C f ds &= \int_0^{\pi/2} f(\vec{r}(t)) v(t) dt = \int_0^{\pi/2} xy \sqrt{2} dt = \sqrt{2} \int_0^{\pi/2} \sin t \cos t dt \\ &= \sqrt{2} \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} \sin 2t dt = \frac{\sqrt{2}}{2} \left[-\frac{1}{2} \cos 2t \right]_0^{\pi/2} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4} (1 + 1) = \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

Ex 3.3.7



$$C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$$

Hva blir $\oint_C f ds$, der $f(x,y) = x + y^2$?
parametriseringer:

$$C_1 : \vec{r}_1(t) = (t, 0) \quad 0 \leq t \leq 1 \quad f(\vec{r}_1(t)) = t$$

$$C_2 : \vec{r}_2(t) = (1-t, t) \quad 0 \leq t \leq 1 \quad f(\vec{r}_2(t)) = (1-t) + t^2 = 1-t+t^2$$

$$C_3 : \vec{r}_3(t) = (0, 1-t) \quad 0 \leq t \leq 1 \quad f(\vec{r}_3(t)) = (1-t)^2 = 1-2t+t^2$$

$$\begin{aligned} \vec{v}_1(t) &= (1, 0) & v_1(t) &= 1 \\ \vec{v}_2(t) &= (-1, 1) & v_2(t) &= \sqrt{2} \\ \vec{v}_3(t) &= (0, -1) & v_3(t) &= 1 \end{aligned}$$

$$\oint_C f ds = \int_{C_1} f ds + \int_{C_2} f ds + \int_{C_3} f ds$$

$$= \int_0^1 f(\vec{r}_1(t)) v_1(t) dt + \int_0^1 f(\vec{r}_2(t)) v_2(t) dt + \int_0^1 f(\vec{r}_3(t)) v_3(t) dt$$

$$= \int_0^1 t dt + \int_0^1 \sqrt{2} (1-t+t^2) dt + \int_0^1 (1-2t+t^2) dt$$

$$= \dots = \frac{5}{6}(\sqrt{2} + 1).$$

3.4 Linjeintegraler over vektorfelt

La C være en orientert kurve (kurve med gjennomløpsretning).

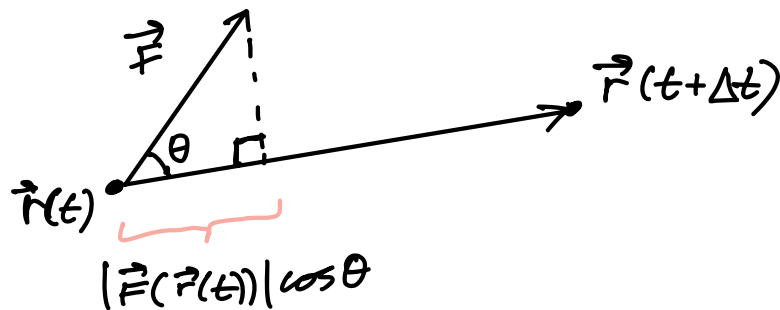
$\vec{r}: [a, b] \rightarrow A \subset \mathbb{R}^n$, stykkevis glatt parametrisering av C

La $\vec{F}: A \rightarrow \mathbb{R}^n$ være vektorfelt definert på A

Vi definerer linjeintegralet av $\vec{F}$ langs C ved

$$\underbrace{\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}}_{\text{notasjon}} = \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt$$

Tolkning i fysikk: Arbeid utført av kraften $\vec{F}$ langs C
(Kraft $\cdot$ vei)

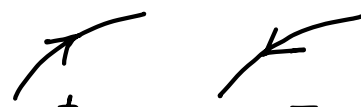


arbeid i tidsintervallet $[t, t+\Delta t]$:

$$\begin{aligned} & |\vec{F}(\vec{r}(t))| \cos \theta \cdot |\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)| \\ &= \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot (\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)) \end{aligned}$$

$\therefore$ ganger opp og deler med Δt ,
summer over alle delintervall.
La $\Delta t \rightarrow 0$

(får Riemannsum: $\int \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt$)

Setning: $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ endrer fortegn (men ikke verdi) når n bytter til motsatt orientering. 

Eksempel Hvilket arbeid gjør $\vec{F}(x,y,z) = (x^2, y^2, z)$ langs $\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, t)$ $0 \leq t \leq 2\pi$?

Løsning: $\vec{r}'(t) = (-\sin t, \cos t, 1)$

$$\vec{F}(\vec{r}(t)) = (\cos^2 t, \sin^2 t, t)$$

$$\vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) = -\cos^2 t \sin t + \sin^2 t \cos t + t$$

$$\int_0^{2\pi} \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt = \int_0^{2\pi} (-\cos^2 t \sin t + \sin^2 t \cos t + t) dt$$

$$= \left[\frac{1}{3} \cos^3 t + \frac{1}{3} \sin^3 t + \frac{1}{2} t^2 \right]_0^{2\pi}$$

$u = \cos t \quad du = -\sin t dt$ $u = \sin t \quad du = \cos t dt$

$$= \frac{1}{2} (2\pi)^2 = \underline{\underline{2\pi^2}}$$

Eksempel 3.4.6 Partikkel med masse m , forflyttes under påvirkning av kraft. Hva blir arbeidet?

Løsning: $\vec{r}(t)$ posisjon:

$$W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} \stackrel{\text{Newton 2.}}{=} \int_C (m\vec{a}(t)) \cdot d\vec{r} = m \int_a^b \vec{a}(t) \cdot \vec{r}'(t) dt = m \int_a^b \vec{a}(t) \cdot \vec{v}(t) dt$$

$$v(t)^2 = \vec{v}(t) \cdot \vec{v}(t)$$

↓ deriverer

$$(v(t)^2)' = \underbrace{\vec{v}'(t)}_{\vec{a}(t)} \cdot \vec{v}(t) + \vec{v}(t) \cdot \vec{v}'(t)$$

$$= m \int_a^b \left(\frac{1}{2} v(t)^2 \right)' dt$$

$$= m \left[\frac{1}{2} v(t)^2 \right]_a^b$$

$$\left(\frac{1}{2} v(t)^2 \right)' = \vec{a}(t) \cdot \vec{v}(t)$$

$$= \frac{1}{2} m v(b)^2 - \frac{1}{2} m v(a)^2$$

arbeid = endring i kinetisk energi.