

3.2: kjerneregelen for parametriserte kurver

Hvis $\vec{r}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ og $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ er deriverbar, så er $u(t) = f(\vec{r}(t))$ også deriverbar, og kjerneregelen sier

$$u'(t) = \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{r}(t)) \dots \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{r}(t)) \right)}_{\text{radvektor}} \underbrace{\begin{pmatrix} x'_1(t) \\ \vdots \\ x'_n(t) \end{pmatrix}}_{\text{søylevektor}}$$

$$= \nabla f(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t)$$

$$= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{r}(t)) x'_i(t)$$

3.5 Gradienter og konservative felt

Vektorfelt $\vec{F} : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$

En gradient er en spesiell type vektorfelt:

$$\nabla \phi = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_1}(\vec{x}) \dots \frac{\partial \phi}{\partial x_n}(\vec{x}) \right)$$

Setning: La $\vec{r} : [a, b] \rightarrow A$ være en parametrisering av en orientert kurve C ,
og la $\vec{r}(a) = \vec{a}$, $\vec{r}(b) = \vec{b}$. Da er

$$\int_C \nabla \phi \cdot d\vec{r} = \phi(\vec{b}) - \phi(\vec{a})$$

Beweis: $\int_C \nabla \phi \cdot d\vec{r} \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b \nabla \phi(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt$

kjernerregel

$$= \int_a^b (\phi(\vec{r}(t)))' dt$$

$$= \left[\phi(\vec{r}(t)) \right]_a^b$$

$$= \phi(\vec{r}(b)) - \phi(\vec{r}(a))$$

$$= \phi(\vec{b}) - \phi(\vec{a}) \quad \blacksquare$$

Definisjon Et vektorfelt på $A \subset \mathbb{R}^n$ kalles konservativt hvis det kan skrives $\vec{F} = \nabla \phi$ for et skalarfelt ϕ .

ϕ kalles en potensialfunksjon

Setning: Hvis $\vec{F}$ er et konservativt felt som har kont. part. der. Da er

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}$$

for alle i, j

Beweis: $\vec{F} = \nabla \phi \Rightarrow F_i(\vec{x}) = \frac{\partial \phi}{\partial x_i}$

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_j \partial x_i} \quad \frac{\partial F_j}{\partial x_i} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j}$$

Like når ϕ har 2.ordens kont. part. der.



$\vec{F}$ har kont. part. der.

Eksempel 3.5.6

Vi ser på $\vec{F}(x, y) = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right)$
på $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = -\frac{1 \cdot (x^2+y^2) - 2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}$$
$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{1 \cdot (x^2+y^2) - 2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

) like

Hvis feltet var konservativt ville

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 \quad \text{for enhver lukket kurve } (\vec{a} = \vec{b})$$

$$\phi(\vec{b}) - \phi(\vec{a}) = 0$$

$$\text{Sett } \vec{r}(t) = (\cos t, \sin t) \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$\vec{F}(\vec{r}(t)) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}'(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

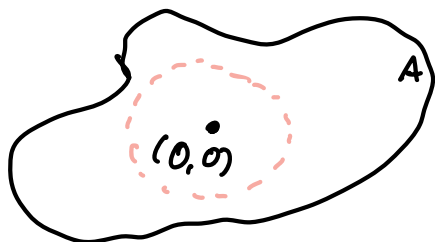
$$\begin{aligned} \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_0^{2\pi} \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt = \int_0^{2\pi} (-\sin t, \cos t) \cdot (-\sin t, \cos t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} ((-\sin t)^2 + \cos^2 t) dt = 2\pi \neq 0 \end{aligned}$$

Feltet er derfor ikke konservativt, selv om $\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x}$.

Hvorfor? $\vec{F}$ er ikke definert på

et enkeltsammenhengende område

(Enhver lukket kont. kurve i A kan "snurpes" sammen til et punkt uten å forlate A).



Setning: Hvis $\vec{F}: A \rightarrow \mathbb{R}^n$ har kont. part. der,

og $A \subset \mathbb{R}^n$ er enkeltsammenhengende, så har vi:

$\vec{F}$ konservativt



$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}$$

Oppgave 8 midtveis MAT1110 V24

$$\vec{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 3x^2 + y + z \\ 3y^2 + x + z \\ 3z^2 + x + y \end{pmatrix} \begin{matrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{matrix}$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = 1 = \frac{\partial F_2}{\partial x} \qquad \frac{\partial F_1}{\partial z} = 1 = \frac{\partial F_3}{\partial x}$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial z} = 1 = \frac{\partial F_3}{\partial y}$$

Feltet kan være konservativt, og er det også
(enkeltsammenhengende, kont. part. der.)

En potensialfunksjon må oppfylle:

integrerer mtp x

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = 3x^2 + y + z \Rightarrow \phi(x, y, z) = x^3 + yx + zx + C_1(y, z)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = 3y^2 + x + z \Rightarrow \phi(x, y, z) = y^3 + xy + zy + C_2(x, z)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 3z^2 + x + y \Rightarrow \phi(x, y, z) = z^3 + xz + yz + C_3(x, y)$$

C_1, C_2, C_3 : funksjoner i to variable.

Ser at: C_1 må inneholde et yz -ledd, samt y^3 og z^3 .

Med $C_1(y, z) = yz + z^3 + y^3$ blir

$$\phi(x, y, z) = x^3 + yx + zx + yz + z^3 + y^3$$

blir potensialfunksjon for $\vec{F}$.

$\frac{\partial}{\partial x}$
 $\frac{\partial}{\partial y}$
 $\frac{\partial}{\partial z}$

$\nearrow$
 $\rightarrow$
 $\searrow$

$3x^2 + y + z = F_1$
 $x + z + 3y^2 = F_2$
 $x + y + 3z^2 = F_3$

Eksempel

$$\vec{F}(\vec{x}) = \frac{k}{|\vec{x}|^3} \vec{x} \text{ er konservativ med}$$

$$\text{potensialfunksjon } \phi(\vec{x}) = -\frac{k}{|\vec{x}|} :$$

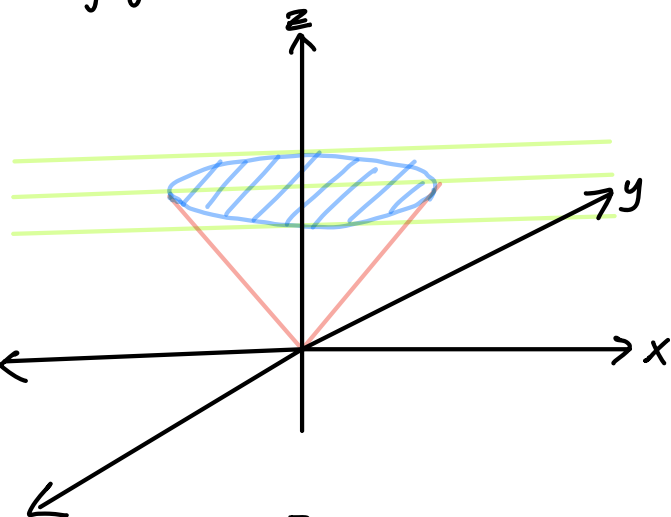
$$\frac{\partial \phi}{\partial x_i} = \frac{d}{dx_i} \left(-\frac{k}{\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}} \right) = \left(-\frac{1}{2} \right) \frac{-k \cdot 2x_i}{(x_1^2 + \dots + x_n^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{kx_i}{(x_1^2 + \dots + x_n^2)^{3/2}} = \frac{kx_i}{|\vec{x}|^3}$$

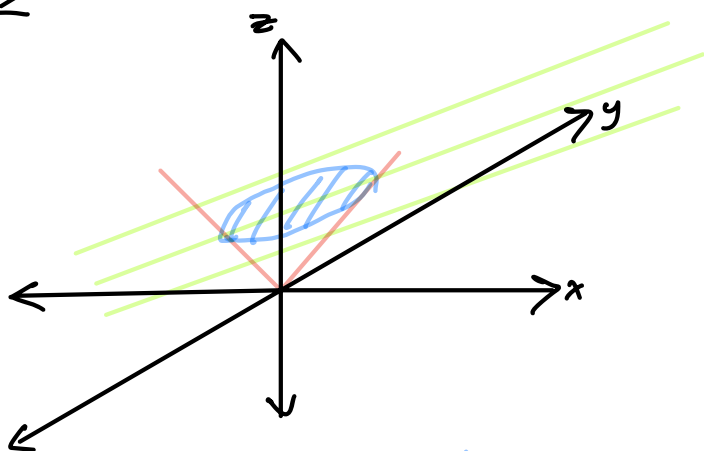
$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x_1} \dots \frac{\partial \phi}{\partial x_n} \right) = \left(\frac{kx_1}{|\vec{x}|^3} \dots \frac{kx_n}{|\vec{x}|^3} \right) = \frac{k}{|\vec{x}|^3} \underbrace{(x_1, \dots, x_n)}_{\vec{x}} = \frac{k}{|\vec{x}|^3} \vec{x} = \vec{F}(\vec{x})$$

Seksjon 3.6

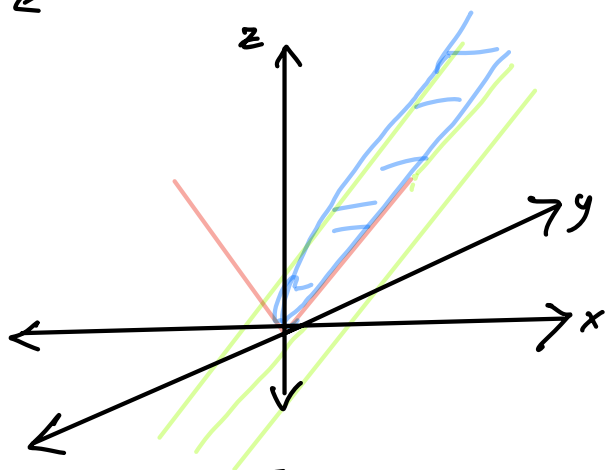
Kjeglesnitt er snittkurver mellom plan og kjegler i rommet



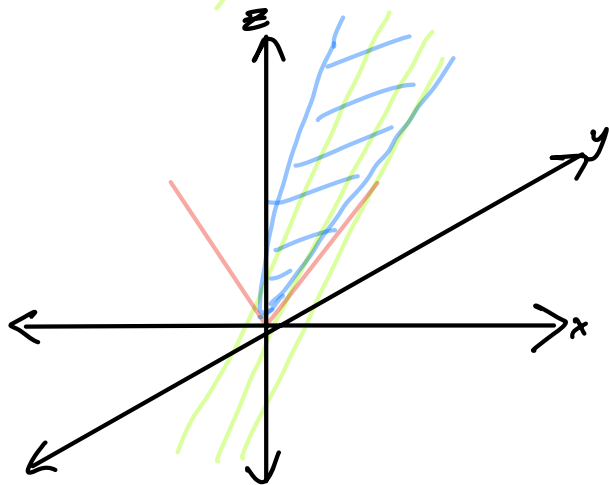
a) Flatt plan (sirkel)



b) Slått plan (ellipse)



c) Plan parallelt med kjeglen (parabel)



d) Enda brattere plan (hyperbel)