

Nest siste oppgave i quiz kap.3 del 1:

$$\vec{F}(x,y) = (-y, x) \quad \vec{r}(t) = (\cos t, \sin t) \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$\vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) = (-\sin t, \cos t) \cdot (-\sin t, \cos t) = 1$$

Siste oppgave i quiz kap.3 del 1:

$$\vec{F}(x,y) = (-y, x) \quad \vec{r}(t) = (\cos(2\pi - t), \sin(2\pi - t)) \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$\begin{aligned} \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) &= (-\sin(2\pi - t), \cos(2\pi - t)) \cdot (\sin(2\pi - t), -\cos(2\pi - t)) \\ &= -1 \end{aligned}$$

3.6 Kjeglesnitt

Standardlikninger for kjeglesnitt

Ellipser: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

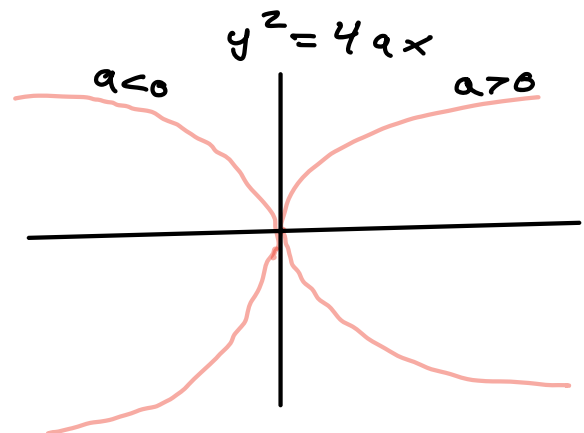
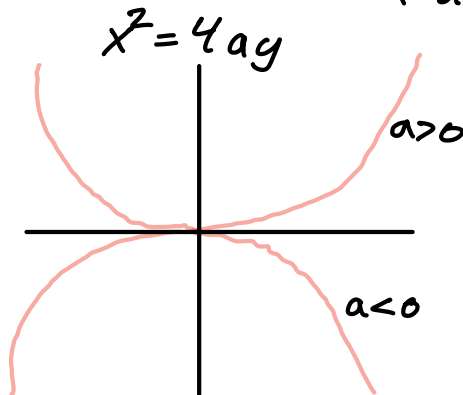
a, b : halvaksler

den største: store halvakse

parametrisering: $\vec{r}(t) = (a \cos t, b \sin t)$

$$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{a^2 \cos^2 t}{a^2} + \frac{b^2 \sin^2 t}{b^2} = 1 \right)$$

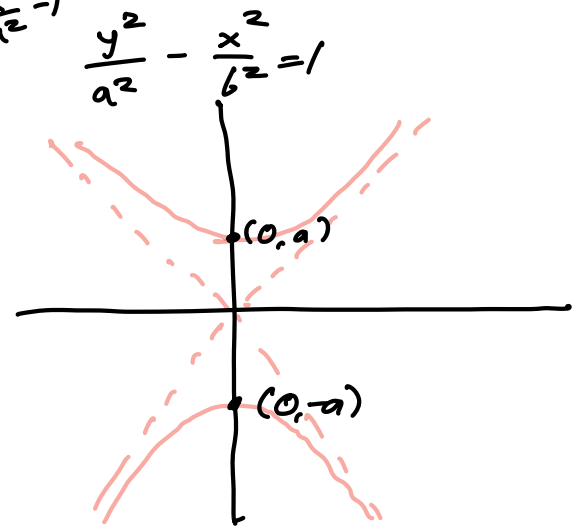
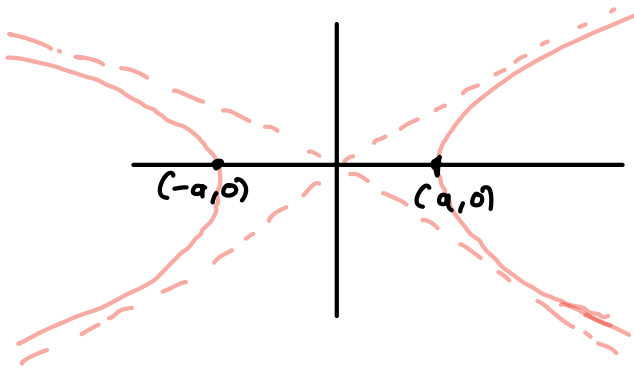
Parabel:



$|a|$ kalles brennvidde

Hyperbel

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad y = \pm b \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}$$



Parametrisering: $\vec{r}(t) = (a \cosh t, b \sinh t)$

(siden $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$)

Hyperbler har asymptoter:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(b \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1} - \frac{b}{a} x \right) = \frac{b}{a} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(a \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1} - x \right)$$

$$= \frac{b}{a} \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + a^2} - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{b}{a} \frac{(x^2 + a^2) - x^2}{\sqrt{x^2 + a^2} + x}$$

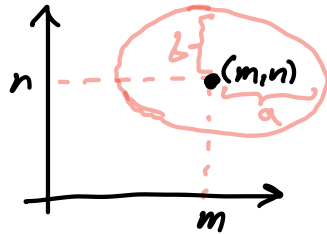
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{b}{a} \frac{a^2}{\sqrt{x^2 + a^2} + x} = 0$$

Eksempel: $\frac{x^2}{2^2} - \frac{y^2}{4^2} = 1$. Asymptoter: $\pm \frac{b}{a} x = \pm 2x$.

$a=2$ $b=4$

Translaterte varianter av standardlikningene

Ellipse: $\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$ (m,n) sentrum i ellipsen



Parabel: $(x-m)^2 = 4a(y-n)$

Hyperbel: $\frac{(x-m)^2}{a^2} - \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$

Eksempel: Hvilket kjeglesnitt er beskrevet ved:

$$4x^2 + y^2 + 2y + 8x - 4 = 0$$

Løsning: $4x^2 + 8x + y^2 + 2y = 4$

$$4(x^2 + 2x + 1) + y^2 + 2y + 1 = 4 + 4 + 1$$

$$4(x+1)^2 + (y+1)^2 = 9$$

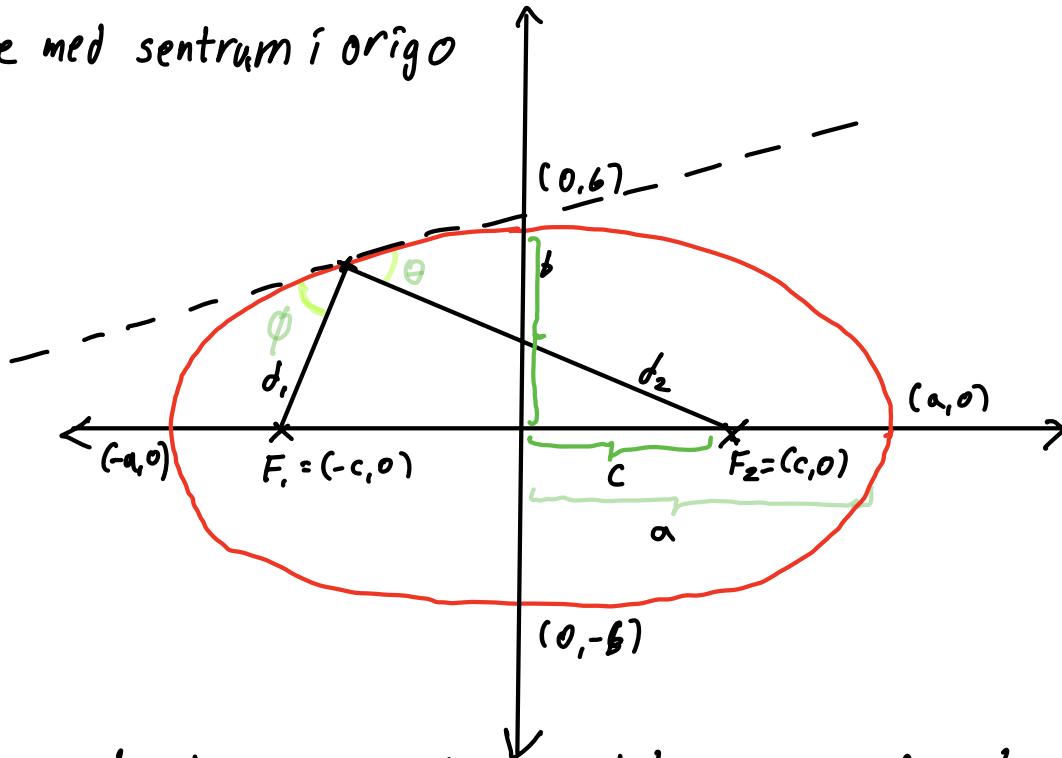
$$\frac{4}{9}(x+1)^2 + \frac{1}{9}(y+1)^2 = 1$$

$$\frac{(x+1)^2}{(3/2)^2} + \frac{(y+1)^2}{3^2} = 1$$

Ellipse med sentrum $(-1, -1)$, halvaksor $\frac{3}{2}$ og 3
 $\underbrace{\hspace{10em}}$ store halvakse.

Geometriske egenskaper for en ellipse :

Ellipse med sentrum i origo



En ellipse består av alle punkter s.a. $d_1 + d_2 = 2a$

$c = \sqrt{a^2 - b^2}$ kalles for brennvidde (a størst)

$F_1 = (-c, 0)$, $F_2 = (c, 0)$ kalles brennpunkter

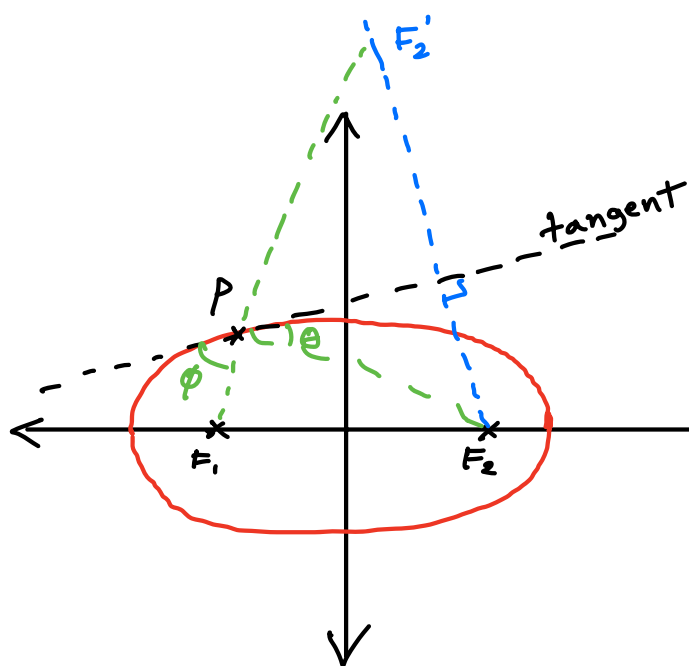
$\phi = \theta$: refleksjonsegenskap for ellipser

Eksempel: Fant en ellipse med sentrum $(-1, -1)$, store halvakse 3
lille halvakse $\frac{3}{2}$

$$\text{brennvidde: } c = \sqrt{3^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{27}}{2} = \frac{3}{2}\sqrt{3}$$

$$\begin{aligned} \text{brennpunkter: } (m, n) \pm (0, c) &= (-1, -1) \pm \left(0, \frac{3}{2}\sqrt{3}\right) \\ &= \underline{\underline{(-1, -1 \pm \frac{3}{2}\sqrt{3})}} \end{aligned}$$

Bevis refleksjonsegenskapen til ellipser.



F_2' er F_2 speilet om tangenten

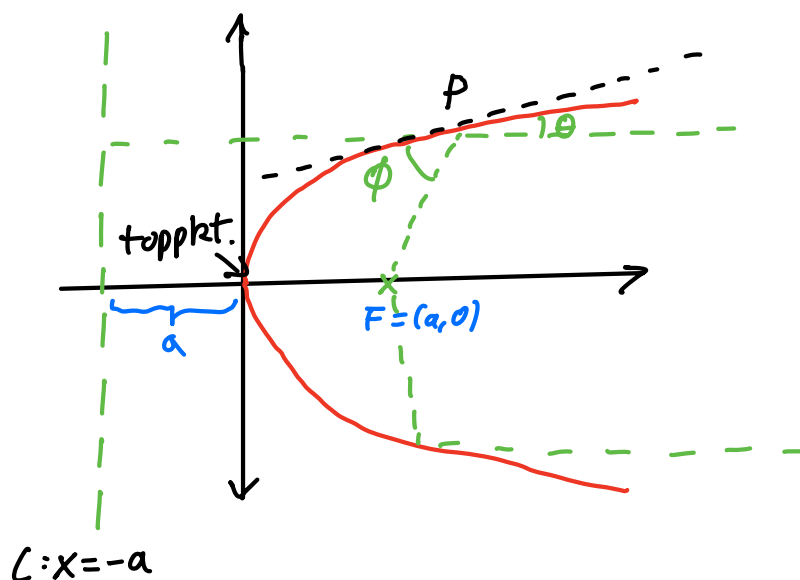
1. Ser at punktet P er det punktet på tangenten med kortest avstand fra F_1 til F_2 via tangenten.

2. Korteste avstand fra F_1 til F_2' er en rett linje.

skjer når $\phi = \theta$

ser og at $|PF_2| = |PF_2'|$.

Geometriske egenskaper for en parabel



F: Brennpunkt

a: Brennvidde

Her er (0,0) toppunkt

L: Styrelinje

1. En parabel består av alle punkter som er like langt fra styrelinjen L som fra $F=(a,0)$

2. $\phi = \theta$: refleksjonsegenskap.

Fra dette kan man utlede standardlikningene:

1. Sier at: $|PF| = |PL|$

$$|PF| = |(x,y) - (a,0)| = |(x-a,y)| = \sqrt{(x-a)^2 + y^2}$$

$$|PL| = |x - (-a)| = |x+a|$$

$|PF|=|PL|$ er det samme som:

$$\sqrt{(x-a)^2 + y^2} = |x+a|$$

$$(x-a)^2 + y^2 = (x+a)^2$$

$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 = x^2 + 2ax + a^2$$

$$y^2 = 4ax, \text{ som er standardlikningen.}$$

Eksempel: En parabel har brennpunkt $(4,0)$, og styrelinje $x=-6$
Hva er likningen for parabelen?

Løsning: Topunktet er like langt fra styrelinjen som fra F:



$$\frac{-6 + 4}{2} = -1$$

$$\Rightarrow \text{toppunkt: } \begin{pmatrix} -1, 0 \end{pmatrix}.$$

$m \quad n$

$$\text{brennvidde} = \text{brennpunkt} - \text{toppunkt} = 5 = a$$

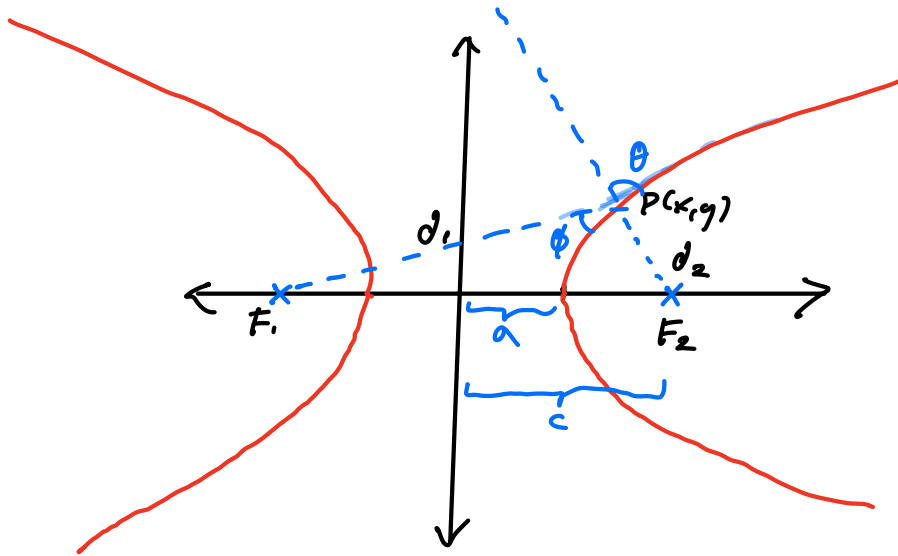
$4 \quad -1$

Likningen blir: $(y-n)^2 = 4a(x-m)$

$$y^2 = 4a(x+1)$$

$$= \underline{\underline{20(x+1)}}$$

Geometriske egenskaper for en hyperbel



1. En hyperbel består av alle punkter P s.o. $|d_1 - d_2| = 2a$

a : halvaksse, c brennvidde

F_1, F_2 brennpunkter $F_1 = (-c, 0)$, $F_2 = (c, 0)$

2. $\phi = \theta$: refleksjonsegenskap.

Vi har $c = \sqrt{a^2 + b^2}$