

3.7 Grafisk fremstilling av skalarfelt

Gitt skalarfelt $f(x,y)$ fra $A \subset \mathbb{R}^2$ til $\mathbb{R}$.
For å tegne f :

1. Lag et grid av (x,y) -verdier (meshgrid)
2. Tegn nivåkurvene til f : $N_c = \{(x,y) : f(x,y) = c\}$
3. Tegn tværrsnitt til f : skjæring med plan parallelle med xz - eller yz -planet.

Eksempel 1: Skalarfeltet $f(x,y) = \frac{(x+1)^2}{(\frac{3}{2})^2} + \frac{(y+1)^2}{3^2}$
har ellipsen $\frac{(x+1)^2}{(\frac{3}{2})^2} + \frac{(y+1)^2}{3^2} = 1$ som nivåkurve ($c=1$)
andre nivåkurver:

$$\frac{(x+1)^2}{(\frac{3}{2})^2} + \frac{(y+1)^2}{3^2} = c$$

$$\frac{(x+1)^2}{(\frac{3}{2}\sqrt{c})^2} + \frac{(y+1)^2}{(3\sqrt{c})^2} = 1$$

(ellipse med samme form

halvakser $\frac{3}{2}\sqrt{c}$, $3\sqrt{c}$

Tværrsnitt: $x=c : z = \frac{(c+1)^2}{(\frac{3}{2})^2} + \frac{(y+1)^2}{3^2}$
 $y=c : z = \frac{(x+1)^2}{(\frac{3}{2})^2} + \frac{(c+1)^2}{3^2}$ } parabler

Kalles en ellipsoide.

Eksempel 2 $f(x,y,z) = \frac{(x+1)^2}{(\frac{3}{2})^2} + \frac{(y+1)^2}{3^2} - z$

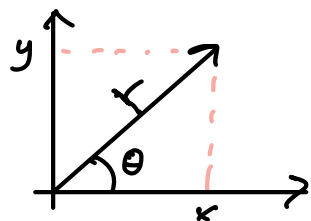
Nivåflater: $\frac{(x+1)^2}{(\frac{3}{2})^2} + \frac{(y+1)^2}{3^2} - z = c$

$$z = \frac{(x+1)^2}{(\frac{3}{2})^2} + \frac{(y+1)^2}{3^2} - c, \text{ som er en ellipsoide.}$$

$c=0$: får ellipsoiden i eksempel 1.

Andre koordinatsystemer

Polarkoordinater ($\mathbb{R}^2$):



polar $\rightarrow$ kartesisk

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

kartesisk $\rightarrow$ polar

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r}$$

$$\sin \theta = \frac{y}{r}$$

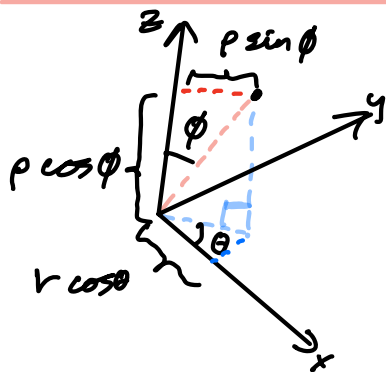
Eksempel 3: paraboloiden $f(x, y) = x^2 + y^2$

er $g(r, \theta) = r^2$ i polarkoordinater.

Sylinderkoordinater: r, θ, z

Plottet i rommet som $(r \cos \theta, r \sin \theta, r^2)$ $0 \leq \theta \leq 2\pi$
 $0 \leq r \leq 2$

Kulekoordinater: ϕ, θ, ρ



$$r = \rho \sin \phi$$

$$z = \rho \cos \phi$$

kule $\rightarrow$ kartesiske

$$x = r \cos \theta = \rho \sin \phi \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta = \rho \sin \phi \sin \theta$$

$$z = \rho \cos \phi$$

kartesisk $\rightarrow$ kule

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\cos \phi = \frac{z}{\rho} \quad (0 \leq \phi \leq \pi)$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

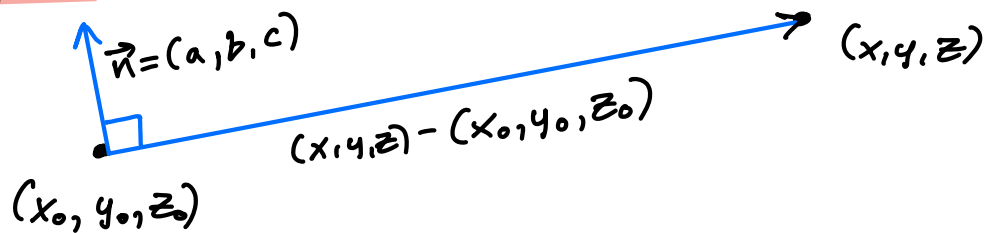
$$\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Eksempel 4: $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$: nivåflatene er kuleskall.

plotte halvkule med $\rho=2$

$$(x, y, z) = (2 \sin \phi \cos \theta, 2 \sin \phi \sin \theta, 2 \cos \phi), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$
$$0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$$

Tangentplan



(x, y, z) ligger i planet gjennom (x_0, y_0, z_0) , med normalvektor $\vec{n}$
 $\Downarrow$

$$\vec{n} \cdot ((x, y, z) - (x_0, y_0, z_0)) = 0$$

$$\Downarrow$$
$$(a, b, c) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0$$

$$\Downarrow$$
$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

$$ax + by + cz = \underbrace{ax_0 + by_0 + cz_0}_{\text{konstant}}$$

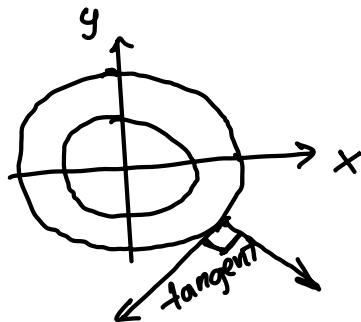
Det følger at: $f(x, y, z) = ax + by + cz$ har nivåflater som er parallelle plan, alle normalt på $\nabla f = (a, b, c)$.

Setning 3.7.8 (tangenten) til nivåkurvene står normalt på gradienten

For paraboloid:

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

$$\nabla f = (2x, 2y)$$



Betis: Hvis $\vec{r}$ er en kurve som ligger på nivåflaten.

Da er $f(\vec{r}(t)) = \text{konstant}$

$$\text{Deriverer: } \nabla f(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) = 0$$

gradient tangent ■

gradient $\perp$ tangent er ortogonale.

Hush: Lineariseringen av $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ i $\vec{a} = (x_0, y_0)$ var

$$T_{\vec{a}} f(x, y) = f(x_0, y_0) + \nabla f(x_0, y_0)^T \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right)$$

$\begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

$\Downarrow$

kalles tangentplan
til f i $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$

$$-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) + z = f(x_0, y_0)$$

$$\left(-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), -\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), 1 \right)$$

er Normalvektor for tangentplanet til f .

Seksjon 3.8 Grafisk fremstilling av vektorfelt.

Anta: $\vec{F}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

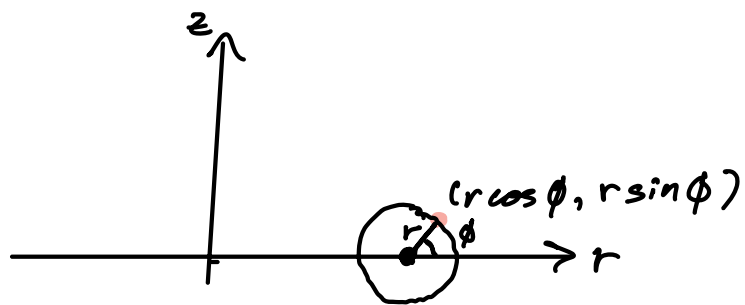
quiver (x, y, u, v) tegner i hvert punkt (x_i, y_i) vektoren (u_i, v_i) .
 $\vec{F}(\vec{x})$

Tolkning: $\vec{F}$ peker i retningen en væske strømmer.

$$\text{plott av } \vec{F}(\vec{x}) = -\frac{\vec{x}}{|\vec{x}|^3}$$

Seksjon 3.9 Parametriserte flater

Plott av torus / smultring:



$$\underbrace{R} \rightarrow (R + r \cos \phi, r \sin \phi)$$

$$\vec{r}(t) = ((R + r \cos \phi) \cos \theta, (R + r \cos \phi) \sin \theta, r \sin \phi)$$

$R=3, r=1$

$$\vec{r}(t) = ((3 + \cos \phi) \cos \theta, (3 + \cos \phi) \sin \theta, \sin \phi)$$