

Kap. 4: Lineær algebra i $\mathbb{R}^n$

Hvordan løse et system med m likninger og n ukjente?

Likningsform

$$\begin{aligned}a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\&\vdots \\a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m\end{aligned}$$

Matriseform

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ & & \ddots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right)$$

kalles utvidet matrise, $(A, \vec{b})$

Kan skrives

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \ddots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

kalles en matrise likning

Skal løse systemet med 3 typer radoperasjoner:

- (i): Bytte om to rader
- (ii): Gange en rad med et tall $\neq 0$
- (iii): Legg en rad ganget med et tall til en annen rad

Idé: Bruke (i) - (iii) flere ganger, slik at vi ender opp med en "trapp" med "enere":

kalles ledende enere

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 0 & 0 & & b'_1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & & b'_2 \\ & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \boxed{1} & b'_m \end{array} \right) \quad (*)$$

På likningsform:

$$\begin{array}{l} 1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \dots = b'_1 \\ 0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + \dots = b'_2 \\ \vdots \end{array} \left. \begin{array}{l} x_1 = b'_1 \\ x_2 = b'_2 \\ \vdots \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{systemet} \\ \text{er løst.} \end{array}$$

matriser, med lik dimensjon.

A og B kalles radekvivalente hvis B kan fås fra A ved hjelp av operasjonene (i) - (iii). Vi skriver da $A \sim B$.

$I \leftrightarrow II$
 $A \sim B$ betyr: B fås fra A ved å bytte om rad 1 og 2.

(*) : kalles for redusert trappetform

Gausseliminasjon: Få en matrise på redusert trappetform ved hjelp av - (i) (iii).

Eksempel 1 Likningsform

Matriseform

$$\begin{array}{l} \text{II} - 2\text{I} \\ \text{III} - 3\text{I} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} x_1 - 2x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 8 \\ 3x_1 - 8x_2 = 6 \end{array} \right.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & 4 & 8 \\ 3 & -8 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$\text{II} - 2\text{I}, \text{III} - 3\text{I}$
 $\sim$

$$\begin{array}{l} x_1 - 2x_2 + x_3 = 3 \\ x_2 + 2x_3 = 2 \\ -2x_2 - 3x_3 = -3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} -2 + 2 \cdot 1 = \\ -2 + 2 = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x_1 - 2x_2 + x_3 = 3 \\ x_2 + 2x_3 = 2 \\ x_3 = 1 \end{array} \quad \text{III} + 2\text{II} \quad \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(***)

$$\begin{array}{l} x_1 - 2x_2 = 2 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 1 \end{array} \quad \text{I} - \text{III}, \text{II} - 2\text{III} \quad \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & 2 \\ x_2 & = & 0 \\ x_3 & = & 1 \end{array} \quad \begin{array}{c} I + 2II \\ \sim \\ \text{ledende enere} \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

Løsningen er $x_1 = 2, x_2 = 0, x_3 = 1$

Oppsummering:

1. Fikk unik løsning
 2. Spøyle 1-3 har ledende enere. kalles pivotsøyler.
Spøyle 4 er ikke pivotsøyle.
 3. Rad 1-3 har ledende enere. kalles pivotrader.
 4. Systemet kan løses på mange forskjellige måter.
- (**) over kalles for trappeform, som betyr:
- (i) Enhver rad har en ener som første ikke-null, eller raden er bare nuller
 - (ii) Enhver rad med ikke bare nuller begynner med minst en null mer enn raden over.

(*) kalles redusert trappeform, det vil si at er på trappeform, og i tillegg har søylene med ledende enere ellers bare nuller.

Enhver matrise er radekvivalent med en på trappeform.

Eksempel 2

$$\left. \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 - x_3 = 2 \end{array} \right\} \text{likningsform}$$

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \end{array} \right) \left. \right\} \text{matrise form}$$

$$\begin{array}{l} \text{II} - 2\text{I} \\ \sim \end{array} \left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -2 & -3 & -6 \end{array} \right) \begin{array}{l} \text{II} \cdot (-\frac{1}{2}) \\ \sim \end{array} \left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & 3 \end{array} \right) \left. \right\} \text{trappeform}$$

$$\begin{array}{l} \text{I} - \text{II} \\ \sim \end{array} \left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & 3 \end{array} \right) \left. \right\} \text{Likningsform}$$

reduert trappeform

$$\left. \begin{array}{l} x_1 - \frac{1}{2}x_3 = 1 \\ x_2 + \frac{3}{2}x_3 = 3 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x_1 = \frac{1}{2}x_3 + 1 \\ x_2 = -\frac{3}{2}x_3 + 3 \end{array}$$

x_1, x_2 kalles basisvariable (søylar med ledende enere)

Merk: x_3 kalles fri variabel (søylar uten ledende enere)

1. Siden x_3 kan velges fritt, så har systemet uendelig mange løsninger.
2. Begge rader er pivotrader
3. Søyle 1 og 2 er pivotsøylar, men ikke søyle 3 og 4.

Eksempel 3:

$$x_1 + x_2 = 2$$

$$3x_1 + 3x_2 = 5$$

$$\left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 5 \end{array} \right) \begin{array}{l} \text{II} - 3\text{I} \\ \sim \end{array} \left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \text{II} \cdot (-1) \\ \sim \end{array} \left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \text{I} - 2\text{II} \\ \sim \end{array} \left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \left. \right\} \begin{array}{l} \text{trappeform} \\ \text{reduert trappeform.} \end{array}$$

$x_1 + x_2 = 2$ $x_1 + x_2 = 0$

Likningsform: $x_1 + x_2 = 0$

$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 = 1$, umulig, siden $0 \neq 1$

- Merk:
1. Systemet har ingen løsninger.
 2. Begge radene er pivotrader

3. Søyler 1 og 3 er pivotsøyler, men ikke søyle 2.

	Eks. 1	Eks. 2	Eks. 3
$(A, \vec{b})$	$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & 4 & 8 \\ 3 & -8 & 0 & 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}$
redusert trappeform	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
Løsninger	en	uendelig mange	ingen
pivotrader	alle	alle	alle
pivotsøyler	alle unntatt siste	alle unntatt to siste	første og siste