

Kap.4 Lineær algebra i $\mathbb{R}^n$ forts.

Fra sist:

	Eks.1	Eks.2	Eks.3
$(A, \vec{b})$	$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & 4 & 8 \\ 3 & -8 & 0 & 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}$
redusert trappeform	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
Løsninger	en	uendelig mange	ingen
pivotrader	alle	alle	alle
pivotsøyle	alle unntatt siste	alle unntatt to siste	første og siste

Setning 4.2.8 / 4.2.9

Anta $(A, \vec{b})$ kan radreduseres til trappematriisen C

a) Dersom siste søyle i C er en pivotsøyle, så har ikke systemet løsninger.

b) Dersom siste søyle i C ikke er pivotsøyle:

1) Hvis alle andre søyler er pivotsøyler så har systemet en unik løsning.

2) Hvis minst en annen søyle ikke er en pivotsøyle: systemet har uendelig mange løsninger.

Setning 4.2.10/4.2.11

ikke $(A, \vec{b})$!

Anta D er den (reduserte) trappeformen til A .

(i) $A\vec{x} = \vec{b}$ har løsning for alle høyresider $\vec{b}$
hvis og bare hvis alle radene i D er pivotrader
(eks. 1 og 2, men ikke eks. 3)

(ii) $A\vec{x} = \vec{b}$ har entydig løsning for alle høyresider $\vec{b}$
hvis og bare hvis alle radene og søylene i D
har pivotelementer. (eks. 1, men ikke eks. 2 og eks. 3).

$$A \sim I_n$$

Man kan vise at den reduserte trappeformen er unik.

Merk: Kun systemer der $m=n$ kan ha entydig løsning
for alle høyresider.

Delvis bevis: Anta at rad i ikke er en pivotrad ($\Rightarrow$ nullrad)
rad i i $(D, \vec{e}_i)$ sier at:

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \dots + 0 \cdot x_n = 1$$

$\mathbb{I}$
 $0 = 1$
så er ikke løsbart

Radreduser $(D, \vec{e}_i)$ baklengs. Får da $(A, \vec{e})$.
Systemet $A\vec{x} = \vec{e}$ har da ikke løsning. ■

Systemet $A\vec{x} = \vec{0}$ kalles homogent.

$A\vec{x} = \vec{b}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$, kalles inhomogent.

Homogene systemer har alltid løsningen $\vec{x} = \vec{0}$, som er
unik hvis og bare hvis alle søylene er pivotsøyler.

Eksp. 1 fra sist: I tillegg $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix}$, la oss også løse
 $A\vec{x}_2 = \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, og $A\vec{x}_3 = \vec{b}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$:

$$\begin{aligned}
 (A, \vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 4 & 8 & 1 & 0 \\ 3 & -8 & 0 & 6 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & -3 & 0 & 1 \end{array} \right) \\
 &\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{array} \right) \\
 &\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -8 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{array} \right) \\
 &\quad \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} -8 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Oppgave 15 midtveds MAT1110 2024

$$\left. \begin{array}{l} x + 3y + 2z = 2 \\ 4x + 2y + z = 4 \\ 3x - y - z = a \end{array} \right\} \text{ hvilken } a \text{ gir løsning?}$$

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & -1 & a \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & -10 & -7 & -4 \\ 0 & -10 & -7 & a-6 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & -10 & -7 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & a-2 \end{array} \right)$$

$a-2=0$: systemet har løsning(er) $a=2$

$a-2 \neq 0$: Ingen løsning (siste søyle er pivotsøyle).

7.

10. Løsningene til

$$2x_1 + x_2 = 16 - 8x_3$$

$$3x_1 + 2x_2 = 25 - 14x_3$$

$$4x_1 + 12x_3 = 30 - x_2$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 8 & 16 \\ 3 & 2 & 14 & 25 \\ 4 & 1 & 12 & 30 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 4 & 8 \\ 3 & 2 & 14 & 25 \\ 4 & 1 & 12 & 30 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 4 & 8 \\ 0 & \frac{1}{2} & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & -4 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

x_3 fri variabel.
siste spalte ikke pivot

⇓

uendelig mange løsninger