

Sek 4.5 Inverse matriser

Anta A er $n \times n$. A^{-1} kalles den inverse matrisen til A hvis den oppfyller at $A^{-1}A = AA^{-1} = I_n$

Hvis A^{-1} eksisterer sier vi at A er inverterbar

Merk: 1. Ikke alltid at A^{-1} eksisterer (feks. for $A = 0$)

2. A^{-1} er unik hvis den eksisterer.

Hvis både X og Y er inverser til A :

$$X = I_n X = (YA)X = Y(AX) = YI_n = Y$$

3. A^{-1} kan brukes til å løse et system:

$$\begin{aligned} A\vec{x} = \vec{b} &\Rightarrow \underbrace{A^{-1}(A\vec{x})}_{=(A^{-1}A)\vec{x} = I_n\vec{x} = \vec{x}} = A^{-1}\vec{b} \Rightarrow \vec{x} = A^{-1}\vec{b} \end{aligned}$$

Setning 4.5.4 karakterisering av inverterbare matriser

Anta A $n \times n$. Følgende er ekvivalent:

(i): A er inverterbar

(ii): $A\vec{x} = \vec{c}$ har entydig løsning for alle $\vec{c}$

(iii): A er radekvivalent med I_n

Beris: (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) er greit:

(iii) $\Leftrightarrow$ pivot i hver søyle, og hver rad $\Leftrightarrow A \sim I_n$

Viser (i) $\Rightarrow$ (ii) ved hjelp av lemma (hopperover (ii) $\Rightarrow$ (i))

Lemma 4.5.2 Hvis A, B er $n \times n$, og $AB = I_n$, så har $A\vec{x} = \vec{c}$ en entydig løsning for alle $\vec{c}$

Beris: La $\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n$ være søylene i B . Da er

$$A(c_1 \vec{b}_1 + c_2 \vec{b}_2 + \dots + c_n \vec{b}_n) = c_1 A \vec{b}_1 + c_2 A \vec{b}_2 + \dots + c_n A \vec{b}_n$$

$$AB = I_n$$

$$A(\vec{b}_1 \dots \vec{b}_n) = (\vec{e}_1 \dots \vec{e}_n)$$

$$A \vec{b}_i = \vec{e}_i \text{ alle } i$$

$$= c_1 \vec{e}_1 + c_2 \vec{e}_2 + \dots + c_n \vec{e}_n$$

$$= (c_1, c_2, \dots, c_n)$$

$$= \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

slik at $\vec{x} = c_1 \vec{b}_1 + \dots + c_n \vec{b}_n$ løser $A \vec{x} = \vec{c}$

Hvorfor entydig løsning?

$A \vec{x} = \vec{c}$ har en løsning $\Rightarrow A$ har bare pivotrader

$\Downarrow$ A kvadratisk

A har bare pivotsøyer

$\Downarrow$

$A \vec{x} = \vec{c}$ entydig løsning. ~~■~~

Hvis A er inverterbar så er $\underbrace{A A^{-1}}_B = I_n$, og lemmet sier

at $A \vec{x} = \vec{c}$ har entydig løsning (fi)

Følger fra beviset: Hvis du radreduserer $(A, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$

til $(I_n, \vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n)$, så er $A^{-1} = (\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$

Følger fra: $\underbrace{AB}_{A^{-1}} = I_n \Leftrightarrow A \vec{b}_i = \vec{e}_i \text{ alle } i$

$\Downarrow$
finner $\vec{b}_i$ ved å simultant løse:

$$(A, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n) \sim \dots \sim (I_n, \vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n)$$

Eksempel fra sist gang

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \\ 3 & -8 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -8 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{radops.} \\ \text{som før} \end{matrix} \sim \dots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 32 & -8 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 12 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

↑ ↑
fra 2'97.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 32 & -8 & 5 \\ 12 & -3 & -2 \\ -7 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ invers } P$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{II}-3\text{I}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{II} \cdot (-\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{I}-2\text{II}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Seksjon 4.6 Lineære kombinasjoner og basiser

$\vec{b}$ kalles en lineær kombinasjon av $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n \in \mathbb{R}^m$ hvis det finnes $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ s.a.

$$\vec{b} = x_1 \vec{a}_1 + x_2 \vec{a}_2 + \dots + x_n \vec{a}_n$$

Merk: $A\vec{x} = \vec{b}$ er det samme som at $\vec{b}$ er en lineær kombinasjon av søyleene til $A = (\vec{a}_1 \vec{a}_2 \dots \vec{a}_n)$

$$(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n) \vec{x} = x_1 \vec{a}_1 + x_2 \vec{a}_2 + \dots$$

Eksempel: Vi viser

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & 4 & 8 \\ 3 & -8 & 0 & 6 \end{pmatrix} \sim \dots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Derfor er:
$$\begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -8 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Spennhet $Sp(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ består av alle vektorer som kan skrives som lineære kombinasjoner av $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$

Merk!: Hvis $Sp(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n) = \mathbb{R}^m$ så må $n \geq m$:

$$\begin{array}{c} \Downarrow \\ Ax = \vec{b} \text{ har løsning for alle } \vec{b} \in \mathbb{R}^m \\ \Downarrow \end{array}$$

Alle rader i A er pivotrader

Da er: $m = \# \text{rader} = \# \text{pivotrader} = \# \text{pivotspøyer} \leq \# \text{spøyer} = n$

$$m \leq n$$

Definisjon 4.6.5

$\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ kalles lineært uavhengige hvis enhver $\vec{b} \in Sp(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ kan skrives som en lineærkombinasjon av $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ på en entydig måte

Setning 4.6.6/4.6.7 Følgende er ekvivalent

- (i): $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ er lineært uavhengige
- (ii): $x_1 \vec{a}_1 + \dots + x_n \vec{a}_n = \vec{0} \Leftrightarrow x_1 = \dots = x_n = 0$
- (iii): $A = (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ har bare pivotspøyer.

Hopper over bevis.

Merk 2: Hvis $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ er lineært uavhengige, så er $n \leq m$:

$\Updownarrow$
alle søyler er pivotsøyler, så

$$\underline{n = \# \text{søyler} = \# \text{pivotsøyler} = \# \text{pivotrader} \leq \# \text{rader} = m}$$

$n \leq m$

Kombiner merk 1 og merk 2:

Hvis $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ er lineært uavhengige, og utspenner $\mathbb{R}^m$,
så er $m = n$

$\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ kalles da en basis for $\mathbb{R}^n$.

Merk (sett $m = n$): $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ basis for $\mathbb{R}^n$

$\Updownarrow$

$$A \sim I_n$$

$\Updownarrow$

$\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ er lineært uavhengige

$\Updownarrow$

$\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ utspenner $\mathbb{R}^n$

Spørsmål 1: Hvis $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ er lineært uavhengige, hvordan
finne en lineær uavhengig delmengde med samme spenn?

Svar: Radreduser $A = (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$, og plukk ut søylene som
blir pivotsøyler.

Eks. 2: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix}$

Derfor er $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ og $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ pivotsøyler,
og er lineært uavhengige, med samme spenn.

Spørsmål 2: Hvordan utvide $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ til en basis

$$(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n, \vec{a}_{n+1}, \dots, \vec{a}_m) \text{ for } \mathbb{R}^n?$$

Svar: 1. Radreduser $A = (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ til trappetform

2. "sett inn" pivotsøyler slik at allerader er pivotrader.

3. Radreduser baklengs for å komme til $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n, \vec{a}_{n+1}, \dots, \vec{a}_m$.

Eksempel: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

1. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{III} \sim \text{I}]{\text{II} - \text{I}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{III} \cdot (-1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{II} \leftrightarrow \text{III}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

2. Sett inn pivotsøyle: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3. Radreduser baklengs:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{II} \leftrightarrow \text{III}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{III} \cdot (-1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{III} + \text{I}]{\text{II} + \text{I}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\vec{a}_1 \quad \vec{a}_2 \quad \vec{a}_3$

$\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3\}$ basis for $\mathbb{R}^3$.