

Kap. 6: Integrasjon av funksjoner i flere variable

Først: Integre over rektangler i $\mathbb{R}^n$:

$$R = \{ (x_1, \dots, x_n) : a_1 \leq x_1 \leq b_1, \dots, a_n \leq x_n \leq b_n \}$$

$$\stackrel{\text{def}}{=} [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]$$

$$\text{I } \mathbb{R}^2: \text{ arealet av } R: |R| = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)$$

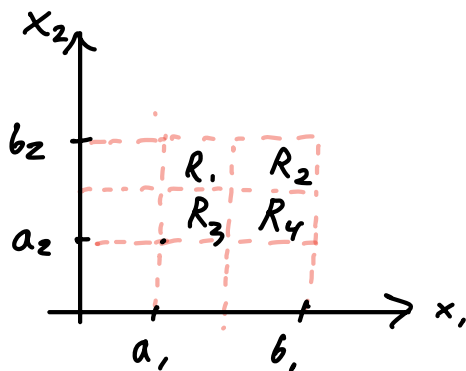
$$\text{I } \mathbb{R}^3: \text{ volumet av } R: |R| = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)(b_3 - a_3)$$

$$\text{I } \mathbb{R}^n: |R| = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \dots (b_n - a_n)$$

volum i $\mathbb{R}^n$

For å integrere en begrenset funksjon over R :

1) Lag en partisjon Π i mindre rektangler $R_1, R_2, \dots, R_k$ ved å splitte over hver akse:



$$2) \text{ Sett } m_i = \{ \inf f(\vec{x}) : x \in R_i \} \quad N(\Pi) = \sum_{i=1}^k m_i |R_i|$$

$$M_i = \{ \sup f(\vec{x}) : x \in R_i \} \quad \Phi(\Pi) = \sum_{i=1}^k M_i |R_i|$$

nedre trappesum

øvre trappesum

3) Lag et utplukk U for Π : E_k punkt $\vec{c}_i \in R_i$ for hver i .

4) Riemannsummen for Π og U er definert ved $R(\Pi, U) = \sum_{i=1}^k f(\vec{c}_i) |R_i|$

$$\text{Vi har at } N(\Pi) \leq R(\Pi, U) \leq \Phi(\Pi)$$

Definisjon 6.1.1 Vi definerer

Øvreintegralet: $\overline{\int \dots \int_R f(\vec{x}) dx_1 \dots dx_n}$ som $\inf(\mathcal{U}(\Pi))$, Π partisjon av R

Nedreintegralet: $\underline{\int \dots \int_R f(\vec{x}) dx_1 \dots dx_n}$ som $\sup(\mathcal{L}(\Pi))$, Π partisjon av R

Er disse like sier vi at f er integrerbar over R , og vi betegner den felles verdien med $\int \dots \int_R f(\vec{x}) dx_1 \dots dx_n$

Setning 6.1.5 Alle kontinuerlige funksjoner på R er integrerbare på R

Setning 6.1.6 Anta at $\{\Pi_n\}$ er en følge av partisjoner s.a. maskervidden $|\Pi_n| \rightarrow 0$ når $n \rightarrow \infty$. La U_n være et utplukk for Π_n . For alle kontinuerlige f er da

$$\int \dots \int_R f(\vec{x}) dx_1 \dots dx_n = \lim_{n \rightarrow \infty} R(\Pi_n, U_n)$$

Setning 6.1.2 / 6.1.9 Anta f, g integrerbare

Da gjelder kjente regneregler som

$$\int \dots \int_R (a f(\vec{x}) + b g(\vec{x})) dx_1 \dots dx_n = a \int \dots \int_R f(\vec{x}) dx_1 \dots dx_n + b \int \dots \int_R g(\vec{x}) dx_1 \dots dx_n$$

Grenser kan byttes om: Hvis $R = [a, b] \times [c, d]$ så er

$$\begin{aligned} \int \int_R f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 &= \int_a^b \left[\int_c^d f(x_1, x_2) dx_2 \right] dx_1 \\ &= \int_c^d \left[\int_a^b f(x_1, x_2) dx_1 \right] dx_2 \end{aligned}$$

kalles itererte integraler

Eksempel: Regn ut $\iint_R (x^2 + xy^3) dx dy$, der $R = [0, 1] \times [0, 2]$
a b c d

Løsning:
$$\int_0^1 \left[\int_0^2 (x^2 + xy^3) dy \right] dx = \int_0^1 \left[x^2 y + \frac{1}{4} x y^4 \right]_0^2 dx$$
$$= \int_0^1 (2x^2 + 4x) dx = \left[\frac{2}{3} x^3 + 2x^2 \right]_0^1$$
$$= \frac{2}{3} + 2 = \underline{\underline{\frac{8}{3}}}$$

bytter rekkefølge:

$$\int_0^2 \left[\int_0^1 (x^2 + xy^3) dx \right] dy = \int_0^2 \left[\frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{2} x^2 y^3 \right]_0^1 dy$$
$$= \int_0^2 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} y^3 \right) dy = \left[\frac{1}{3} y + \frac{1}{8} y^4 \right]_0^2$$
$$= \frac{2}{3} + 2 = \underline{\underline{\frac{8}{3}}}$$

Multiple integraler over begrensede områder

- La
- $A \subseteq \mathbb{R}^n$ være begrenset
 - R være et rektangel s.a. $A \subseteq R$
 - $f_A(\vec{x}) = \begin{cases} f(\vec{x}) & x \in A \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$ utvidelse av f til R

Hvis f_A er integrerbar på R sier vi at f er integrerbar på A ,
og vi definerer

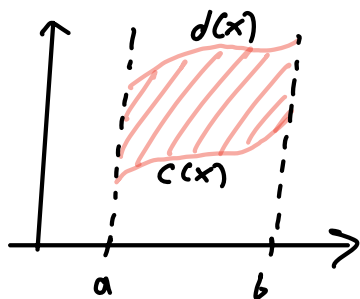
$$\int_A \dots \int f(\vec{x}) dx_1 \dots dx_n = \int_R \dots \int f_A(\vec{x}) dx_1 \dots dx_n$$

Problem: f_A er typisk ikke kontinuerlig på R ,
så er kanskje ikke integrerbar der heller.

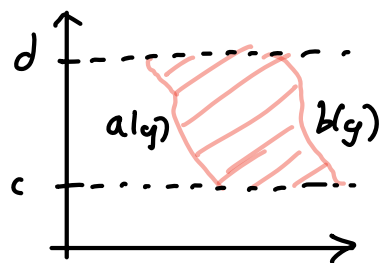
Men: Hvis A er lukket, begrenset, Jordan målbar, ↖ se sek 6.6 så er
enhver kontinuerlig funksjon $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ integrerbar på A

(Teorem 6.6.6).

type I - område



type II - område



$$A = \{(x, y) : a \leq x \leq b, c(x) \leq y \leq d(x)\} \quad A = \{(x, y) : c \leq y \leq d, a(y) \leq x \leq b(y)\}$$

$c(x), d(x), a(y), b(y)$ antas kontinuerlige.

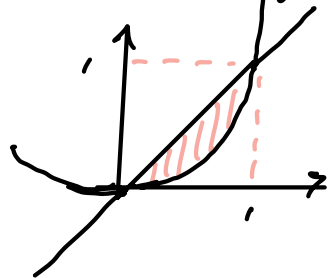
Da er type I/II - områder Jordanmålbare,

så kontinuerlige funksjon er integrerbare på type I/II.

Integralene kan regnes ut ved iterasjon:

$$\iint_A f(x, y) dx dy = \begin{cases} \int_a^b \left[\int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y) dy \right] dx & \text{type I} \\ \int_c^d \left[\int_{a(y)}^{b(y)} f(x, y) dx \right] dy & \text{type II} \end{cases}$$

Eksempel: Regn ut $\iint_A (2xy + 2x) dx dy$, der A er området begrenset av $y=x$ og $y=x^2$



$$y = x^2 \\ x = \sqrt{y}$$

$$y \leq x \leq \sqrt{y}$$

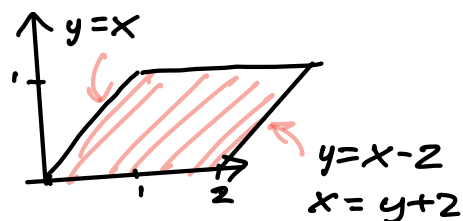
Løsning: Type I:

$$A = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq x\}$$

$$\begin{aligned}
 \iint_A (2xy+2x) dx dy &= \int_0^1 \left[\int_{x^2}^x (2xy+2x) dy \right] dx \\
 &= \int_0^1 \left[xy^2 + 2xy \right]_{x^2}^x dx \\
 &= \int_0^1 (x^3 + 2x^2 - x^5 - 2x^3) dx \\
 &= \int_0^1 (-x^5 - x^3 + 2x^2) dx \\
 &= \left[-\frac{1}{6}x^6 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 \right]_0^1 = -\frac{1}{6} - \frac{1}{4} + \frac{2}{3} \\
 &= \frac{-2-3+8}{12} = \frac{3}{12} = \underline{\underline{\frac{1}{4}}}
 \end{aligned}$$

Type II: $A = \{(x,y) : 0 \leq y \leq 1, y \leq x \leq \sqrt{y}\}$

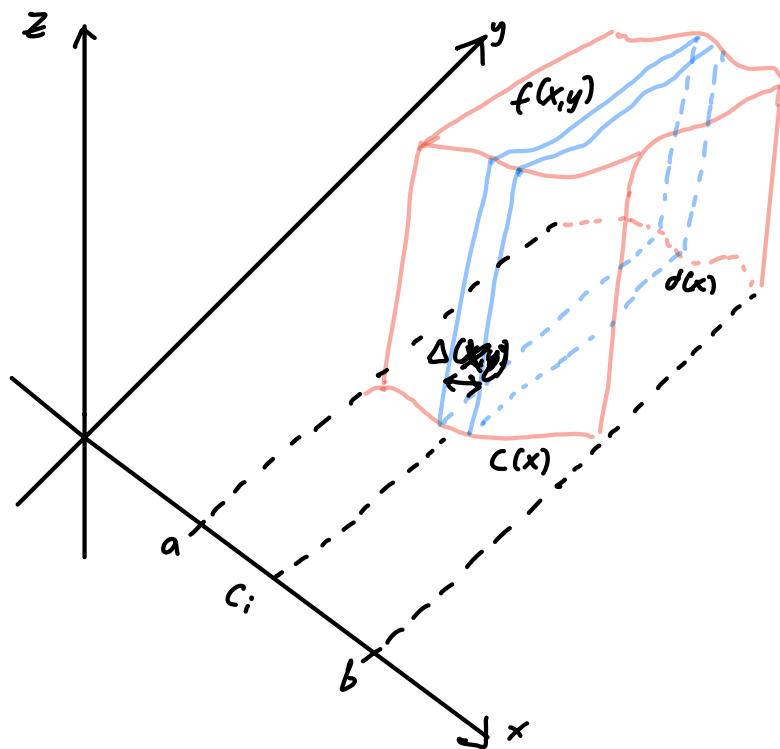
$$\begin{aligned}
 \iint_A (2xy+2x) dx dy &= \int_0^1 \left[\int_y^{\sqrt{y}} (2xy+2x) dx \right] dy \\
 &= \int_0^1 \left[x^2y + x^2 \right]_y^{\sqrt{y}} dy = \int_0^1 (y^2 + y - y^3 - y^2) dy \\
 &= \int_0^1 (y - y^3) dy = \left[\frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{4}y^4 \right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \underline{\underline{\frac{1}{4}}}
 \end{aligned}$$

Eksempel: Regn ut $\iint_A xy^2 dx dy$ over 

Type II: $A = \{(x,y) : 0 \leq y \leq 1, y \leq x \leq y+2\}$

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^1 \left[\int_y^{y+2} xy^2 dx \right] dy = \int_0^1 \left[\frac{1}{2}x^2y^2 \right]_y^{y+2} dy = \int_0^1 \left(\frac{1}{2}(y+2)^2y^2 - \frac{1}{2}y^4 \right) dy \\
 &= \int_0^1 \left(\frac{1}{2}y^4 + 2y^3 + 2y^2 - \frac{1}{2}y^4 \right) dy = \left[\frac{1}{2}y^4 + \frac{2}{3}y^3 \right]_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \underline{\underline{\frac{7}{6}}}
 \end{aligned}$$

Illustrasjon av et type-I område



I blått: E tverrsnitt med bredde Δx , ($x = c_i$)

Areal tverrsnitt $\approx \int_{c(x)}^{d(x)} f(c_i, y) dy$, kaller denne for $A(c_i)$

Volum av tverrsnitt: $A(c_i) \Delta x_i$

Splitter opp volumet i mange tverrsnitt, og legger sammen disse volumene. Vi får:

$\sum_{i=1}^n A(c_i) \Delta x_i$ som er en Riemannsum for

$$\int_a^b A(x) dx = \int_a^b \left[\int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y) dy \right] dx,$$

som blir volumet over A .