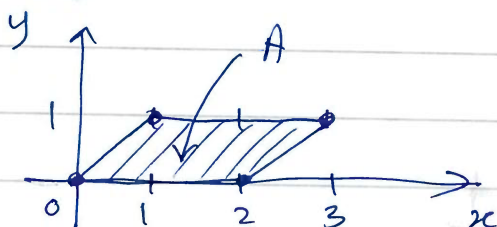


Seksj. 6.2. Eksempel 2

Forts.

Regn ut $\iint_A xy^2 dx dy$, der A er området beskrevet ved $0 \leq y \leq 1$, $y \leq x \leq y+2$.

Løsning:



Området er av type II med $a(y)=y$, $b(y)=y+2$.

Da er

$$I = \int_0^1 \left[\int_{a(y)}^{b(y)} xy^2 dx \right] dy = \int_0^1 \left[\int_y^{y+2} xy^2 dx \right] dy$$

$$= \frac{7}{6} \quad (\text{siste forelesning}).$$

~~Seksjon 6.3~~

Eksempel 2 igjen: koordinat-skifte.

Alternativ løsning

La $v=y$ og $u=x-y$.

Da er A beskrevet av $0 \leq v \leq 1$, $0 \leq u \leq 2$.
 A er et rektangel m.h.t. u, v .
 Trenger x, y uttrykt ved u, v : $x = u+v$,
 $y = v$.

$$\text{Jacobi-matrisen er } J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Finne determinanten: $|J| = 1 \times 1 - 1 \times 0 = 1$.

Da er

$$I = \int_0^2 \left[\int_0^1 xy^2 |J| dv \right] du \quad (1)$$

$$\text{eller} = \int_0^1 \left[\int_0^2 xy^2 |J| du \right] dv.$$

Braker ①:
$$I = \int_0^2 \left[\int_0^1 (u+v)^2 v^2 dv \right] du$$

$$= \int_0^2 \left[\int_0^1 (uv^2 + v^3) dv \right] du$$

$$= \int_0^2 \left[\frac{uv^3}{3} + \frac{v^4}{4} \right]_{v=0}^{v=1} du$$

$$= \int_0^2 \left(\frac{u}{3} + \frac{1}{4} \right) du$$

$$= \left[\frac{u^2}{6} + \frac{u}{4} \right]_{u=0}^{u=2}$$

$$= \frac{4}{6} + \frac{2}{4} = \frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{4+3}{6} = \frac{7}{6}$$

Seksjon 6.3

Eksempel 4: Polar koordinater.

Her er $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$. $(x, y) \rightarrow (r, \theta)$

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{bmatrix}$$

Da er $|J| = r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta = r$.

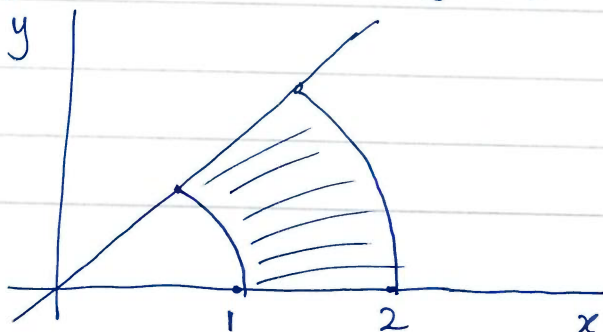
Eksempel Finn $\iint_A x^2 + y^2 dx dy$ når A

er området avgrenset av ~~$x, y \geq 0$~~ $x, y \geq 0$

og $y \leq x$.

og $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$

Løsning:
Start med en figur!



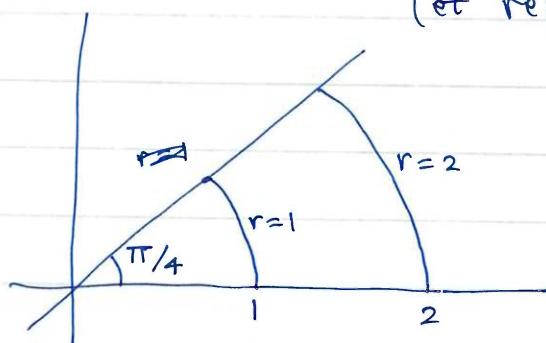
Vi ser at vi ~~sett~~ bruker polarkoordinater:

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta.$$

Da er området A beskrevet av

$$1 \leq r \leq 2 \quad \text{og} \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}.$$

(et rektangel i (r, θ) -koordinater)



$$\text{Da er } I = \int_0^2 \left[\int_0^{\pi/4} (x^2 + y^2) |J| d\theta \right] dr$$

$$= \int_0^2 \left[\int_0^{\pi/4} r^2 \cdot r d\theta \right] dr$$

$$= \frac{\pi}{4} \int_0^2 r^3 d\theta dr$$

$$= \int_0^2 \left[r^3 \theta \right]_{\theta=0}^{\theta=\pi/4} dr$$

$$= \int_0^2 r^3 \frac{\pi}{4} dr$$

$$= \frac{\pi}{4} \int_0^2 r^3 dr = \frac{\pi}{4} \left[\frac{r^4}{4} \right]_{r=0}^{r=2}$$

$$= \frac{\pi}{4} \left(\frac{2^4}{4} - \frac{1}{4} \right) = \frac{\pi}{4} \left(\frac{15}{4} \right) = \frac{15}{16} \pi.$$

Seksjon 6.4. Anvendelser av dobbelintegraler

1. Finne areal av $A = \iint_A 1 \, dx \, dy$

2. Finne masse av $A \quad m(A) = \iint_A f(x,y) \, dx \, dy$
der $f(x,y)$ beskriver masse tettheten.

3. Masse middepunkt til A er $(\bar{x}, \bar{y})$,
der

$$\bar{x} = \frac{1}{m(A)} \iint_A x f(x,y) \, dx \, dy,$$

$$\bar{y} = \frac{1}{m(A)} \iint_A y f(x,y) \, dx \, dy.$$

A som i Eksempel 4

Areal til A er $\iint_A 1 \, dx \, dy = \int_0^2 \left[\int_0^{\pi/4} r \, d\theta \right] dr$
 $= \int_0^2 r \, dr \int_0^{\pi/4} 1 \, d\theta = \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^2 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{3}{2} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{8}$

Finne $\bar{x}$:

$$\begin{aligned} \iint_A x f(x,y) \, dx \, dy &= \int_1^2 \left[\int_0^{\pi/4} r \cos \theta \, r \, d\theta \right] dr \\ &= \int_1^2 r^2 \, dr \int_0^{\pi/4} \cos \theta \, d\theta \\ &= \left[\frac{r^3}{3} \right]_1^2 \left[\sin \theta \right]_0^{\pi/4} \\ &= \frac{7}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \bar{x} = \frac{7}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{8}{3\pi}. \end{aligned}$$

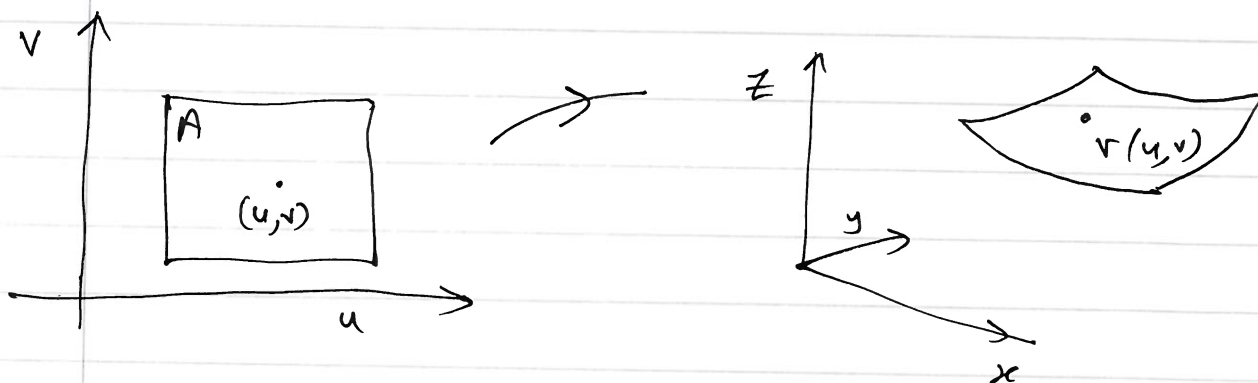
Finne $\bar{y}$: $\iint_A y f(x,y) \, dx \, dy = \int_1^2 \left[\int_0^{\pi/4} r \sin \theta \, r \, d\theta \right] dr$
 $= \int_1^2 r^2 \, dr \int_0^{\pi/4} \sin \theta \, d\theta = \frac{7}{3} \left[-\cos \theta \right]_0^{\pi/4}$
 $= \frac{7}{3} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + 1 \right) \Rightarrow \bar{y} = \frac{7}{3} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \frac{8}{3\pi}.$

Seksjon 6.4.3. Flateintegraler

Anta at A er et område i $\mathbb{R}^2$ og $r: A \rightarrow \mathbb{R}^3$ er kontinuertlig,

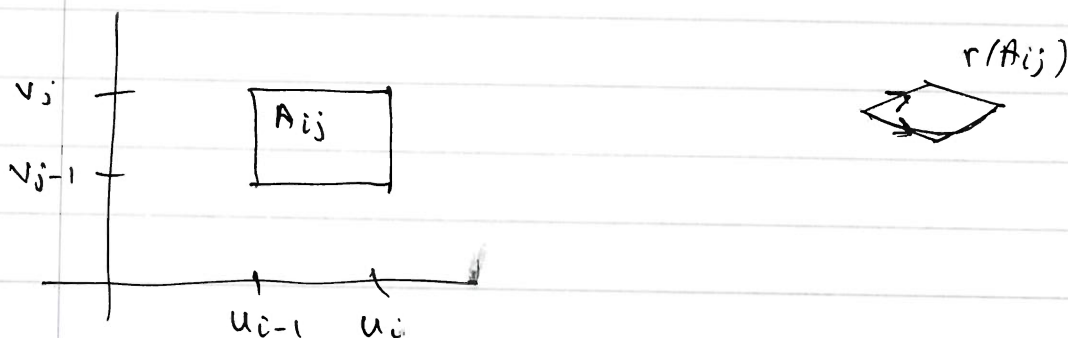
$$r(u,v) = X(u,v)\underline{i} + Y(u,v)\underline{j} + Z(u,v)\underline{k}.$$

A og r beskriver en parametrisert overflate



Arealet til overflaten er $\iint_A \left| \left(\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} \right)(u,v) \right| du dv$.

Hvorfor? Vi deler opp A i små ruter:



Arealet til flateelementet $r(A_{ij})$ er tilnærmet lik et parallelogram og arealet til $r(A_{ij})$ er dermed tilnærmet lik

$$\left| \left(r(u_i, v_{j-1}) - r(u_{i-1}, v_{j-1}) \right) \times \left(r(u_{i-1}, v_j) - r(u_{i-1}, v_{j-1}) \right) \right|$$

$$\approx \left| \frac{\partial r}{\partial u}(u_{i-1}, v_{j-1}) \times \frac{\partial r}{\partial v}(u_{i-1}, v_{j-1}) \right| (u_i - u_{i-1})(v_j - v_{j-1})$$

Summen av disse er en Riemann-sum for $\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v}$ og konvergerer til integralet ovenfor.