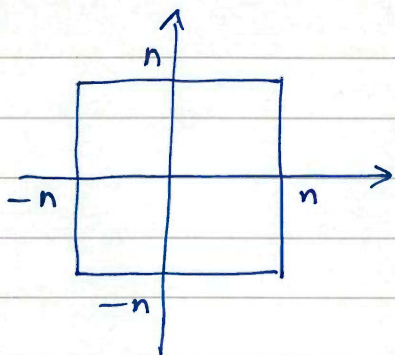


Seksjon 6.8 Uegentlige integraler i $\mathbb{R}^2$

Definer $K_n := \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x|, |y| \leq n \}$



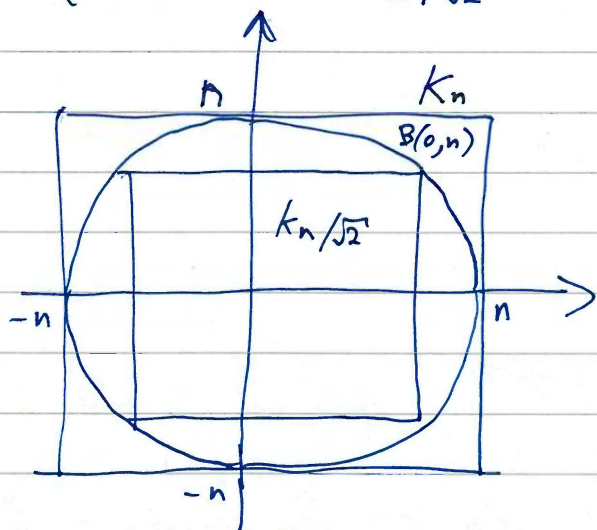
Definisjon La $A \subseteq \mathbb{R}^2$ være slik at $A \cap K_n$ er Jordanmålbar for alle n . Hvis $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ er ikke-negativ og kontinuerlig definerer vi

$$\iint_A f(x,y) dx dy = \lim_{n \rightarrow \infty} \iint_{A \cap K_n} f(x,y) dx dy$$

hvis grenseverdien eksisterer. Vi sier da at det uegentlige integralet $\iint_A f(x,y) dx dy$ konvergerer.

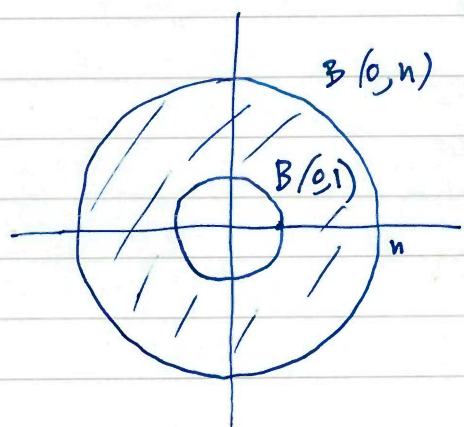
Ellers sier vi at det divergerer.

Sætning 6.8.3. Kan bytte ut K_n med $B(0,n)$
(fordi $K_n/\sqrt{2} \subset B(0,n) \subset K_n$)



Eksempel 1. Finn $I = \iint_{\mathbb{R}^2 \setminus B(0,1)} \frac{1}{(x^2+y^2)^{3/2}} dx dy$.

Løsning $I = \lim_{n \rightarrow \infty} I_n$, der $I_n = \iint_{B(0,n) \setminus B(0,1)} \frac{1}{(x^2+y^2)^{3/2}} dx dy$.



Polarkoordinater: $x = r \cos \theta$,
 $y = r \sin \theta$.

Da er

$$I_n = \int_0^{2\pi} \left[\int_1^n \frac{1}{(r^2)^{3/2}} r dr \right] d\theta$$

Husk: $|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = r$.

Da er
$$I_n = 2\pi \int_1^n \frac{1}{r^2} dr = 2\pi \left[-\frac{1}{r} \right]_{r=1}^{r=n}$$

$$= 2\pi \left(1 - \frac{1}{n} \right)$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 2\pi$ og $I = 2\pi$.

Eksempel 2. Finn $I = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)/2} dx dy$.

Løsning $I = \lim_{n \rightarrow \infty} I_n$, $I_n = \iint_{B(0,n)} e^{-(x^2+y^2)/2} dx dy$

Polarkoordinater igen:

$$I_n = \int_0^{2\pi} \left[\int_0^n e^{-r^2/2} r dr \right] d\theta$$

$$= 2\pi \left[-e^{-r^2/2} \right]_{r=0}^{r=n} = 2\pi (1 - e^{-n^2/2}).$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$ eksisterer og I konvergerer til 2π .

Eksempel 3 Hva er det uegentlige integralet

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx \quad ?$$

Løsning Bruk forrige resultat :

integralet $\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)/2} dx dy$ er også

grenseverdien av

$$\hat{I}_n := \iint_{K_n} e^{-(x^2+y^2)/2} dx dy.$$

Vi finner at $\hat{I}_n = \int_{-n}^n \int_{-n}^n e^{-x^2/2} e^{-y^2/2} dx dy$

$$= \left(\int_{-n}^n e^{-y^2/2} dy \right) \left(\int_{-n}^n e^{-x^2/2} dx \right)$$

$$= \left(\int_{-n}^n e^{-x^2/2} dx \right)^2.$$

Da er $\int_{-n}^n e^{-x^2/2} dx = \sqrt{\hat{I}_n} \rightarrow \sqrt{2\pi}$ når $n \rightarrow \infty$.

Svaret : $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} dx = \sqrt{2\pi}.$

Mer generelle funksjoner

La $A \subseteq \mathbb{R}^2$. For $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ definerer vi

$$f_+(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{hvis } f(x,y) \geq 0, \\ 0 & \text{ellers,} \end{cases}$$

$$f_-(x,y) = \begin{cases} -f(x,y) & \text{hvis } f(x,y) < 0, \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

Da er $f(x,y) = f_+(x,y) - f_-(x,y)$, $(x,y) \in A$.

Definisjon Anta at f er begrenset og kontinuertlig på A . Anta at $A \cap K_n$ er Jordan-målbart for alle $n \in \mathbb{N}$. Vi sier at integralet

$\iint_A f(x,y) dx dy$ konvergerer dersom begge

integralene $\iint_A f_+(x,y) dx dy$ og $\iint_A f_-(x,y) dx dy$

konvergerer, og i så fall definerer vi

$$\iint_A f(x,y) dx dy = \iint_A f_+(x,y) dx dy - \iint_A f_-(x,y) dx dy.$$

Trippelintegraler

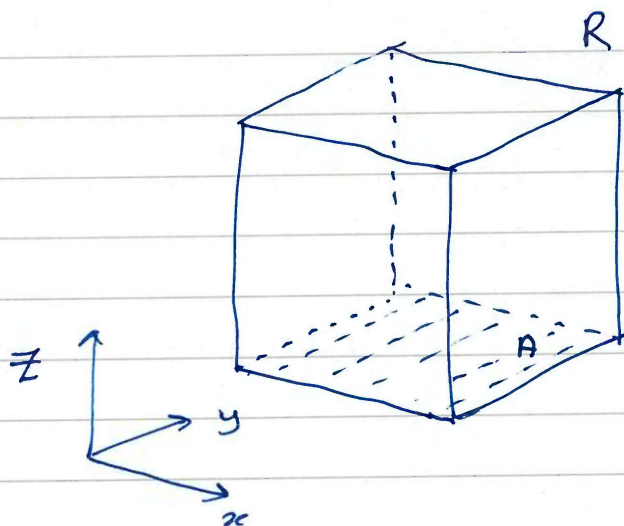
Rektangel (boks) i $\mathbb{R}^3$:

$$R = [a_1, a_2] \times [b_1, b_2] \times [c_1, c_2].$$

Hvis $f: R \rightarrow \mathbb{R}$ er kontinuertlig er f integrerbar over R og

$$\begin{aligned} \iiint_R f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz &= \iint_A \left[\int_{c_1}^{c_2} f(x, y, z) \, dz \right] dx \, dy \\ &= \int_{a_1}^{a_2} \left[\int_{b_1}^{b_2} \left[\int_{c_1}^{c_2} f(x, y, z) \, dz \right] dy \right] dx, \end{aligned}$$

der $A = [a_1, a_2] \times [b_1, b_2]$.



kan bytte rekkefølge: 6 permutasjoner.

Mer generelle områder

La $S \subseteq \mathbb{R}^3$. Hvis $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ er begrenset sier vi at f er integrerbar over S dersom

$$f_S(x, y, z) := \begin{cases} f(x, y, z) & , (x, y, z) \in S \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

er integrerbar over $\mathbb{R}^3$. I så fall setter vi

$$\iiint_S f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{\mathbb{R}^3} f_S(x, y, z) dx dy dz.$$

Setning 6.9.6. Anta at $A \subseteq \mathbb{R}^2$ er

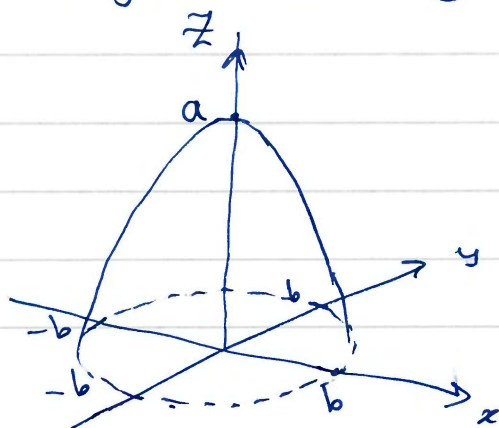
Jordan-målbar og at $g, h: A \rightarrow \mathbb{R}$ er kontinuerlige og $g(x, y) \leq h(x, y)$ for alle $(x, y) \in A$. La

$$S := \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in A, g(x, y) \leq z \leq h(x, y) \}.$$

Hver kontinuerlig funksjon $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ er integrerbar over S , og

$$\iiint_S f(x, y, z) dx dy dz = \iint_A \left[\int_{g(x, y)}^{h(x, y)} f(x, y, z) dz \right] dx dy.$$

Eksempel Finn volumet av paraboloiden med høyde a og radius b .



Løsning: Paraboloiden er området S som ligger over x - y -planet og under flaten $z = a \left(1 - \frac{x^2 + y^2}{b^2}\right)$.

$$\begin{aligned} \text{Da er } \text{Vol}(S) &= \iiint_S 1 \, dx \, dy \, dz \\ &= \iint_A \left[\int_0^{a(1-(x^2+y^2)/b^2)} 1 \cdot dz \right] dx \, dy, \end{aligned}$$

der $A = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq b^2\}$.

$$\text{Da er } \text{Vol}(S) = a \iint_A \left(1 - \frac{x^2 + y^2}{b^2}\right) dx \, dy$$

Bruk polarkoordinater: $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$:

$$\text{Vol}(S) = a \int_0^{2\pi} \left[\int_0^b \left(1 - \frac{r^2}{b^2}\right) r \, dr \right] d\theta$$

$$= 2\pi a \int_0^b \left(r - \frac{r^3}{b^2}\right) dr$$

$$= 2\pi a \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4b^2} \right]_0^b$$

$$= 2\pi a \left(\frac{b^2}{2} - \frac{b^4}{4b^2} \right)$$

$$= 2\pi a \left(\frac{b^2}{4} \right)$$

$$= \frac{\pi a b^2}{2}$$