

6.14. Divergensteoremet

Anta at V er lukket, begrenset i $\mathbb{R}^3$ med rand T satt sammen av endelig mange glatte, parametriserte flater, og anta at $\vec{n}$ er enhetsnormalen som peker ut av V . La $\vec{F}$ være et vektorfelt med kontinuerlige partiellderiverte. Da er

$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{F} \, dx \, dy \, dz = \int_T \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS.$$

Eksempel Regn ut $\int_T \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS$ der T er kuleflaten med sentrum origo og radius 3 av

$$\vec{F}(x, y, z) = e^{z^2} y \vec{i} + x \sin z \vec{j} + (x^3 y^4 + z) \vec{k}.$$

Vi beregner $\operatorname{div} F = 1$. Dermed er

$$\int_T \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \iiint_V 1 \, dx \, dy \, dz = \operatorname{Vol}(V) = \frac{4}{3} \pi 3^3 = 36\pi.$$

Kan også bruke divergensteoremet i motsatt retning:

Korollar av Divergensteoremet

$$\begin{aligned} \operatorname{vol}(V) &= \frac{1}{3} \int_T (x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}) \cdot \vec{n} \, dS \\ &= \int_T x \vec{i} \cdot \vec{n} \, dS = \int_T y \vec{j} \cdot \vec{n} \, dS = \int_T z \vec{k} \cdot \vec{n} \, dS. \end{aligned}$$

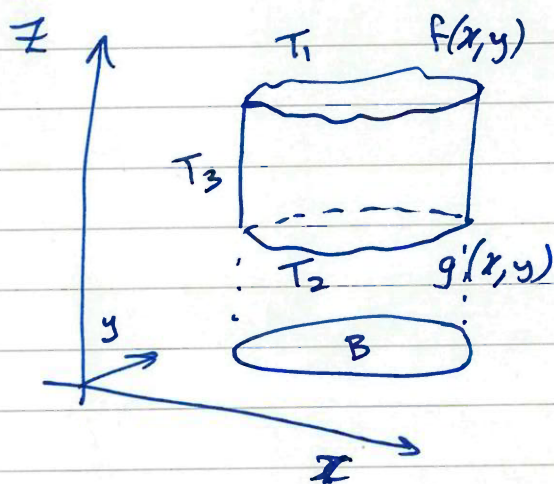
Bevis i alle fire flateintegralene er $\operatorname{div} F = 1$ og dermed er $\int_T \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \iiint_V 1 \, dx \, dy \, dz = \operatorname{vol}(V).$

Beris for divergensteoremet

for områder som er x -enkle, y -enkle, og z -enkle.

V er z -enkelt hvis det er begrenset av funksjonsgrafer $z = g(x,y)$ og $z = f(x,y)$:

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in B, g(x,y) \leq z \leq f(x,y)\}.$$



Teoremet sier at

$$\iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz = \int_T (P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy).$$

vi skal vise for et z -enkelt område at

$$\iiint_V \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz = \int_T R dx \wedge dy.$$

Vi deler randen T i tre biter T_1, T_2, T_3 som i figuren. En parametrisering for T_1 er

$$r_1(u,v) = u \vec{i} + v \vec{j} + f(u,v) \vec{k}. \quad \left(\left(\frac{\partial \vec{r}_1}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}_1}{\partial v} \right) \cdot \vec{k} = 1 > 0 \right)$$

Da er $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$ og

$$\int_{T_1} R dx \wedge dy = \int_B R(r_1(u,v)) \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} du dv$$

$$= \int_B R(u,v,f(u,v)) \cdot 1 \cdot du dv = \int_B R(x,y,f(x,y)) dx dy.$$

En parametrisering for T_2 er

$$r_2(u,v) = u \vec{i} + v \vec{j} + g(u,v) \vec{k}$$

$$\text{og } \frac{\partial(X,Y)}{\partial(u,v)} = 1 \quad \text{og}$$

$$\int_{T_2} R \, dx \wedge dy = - \int_B R(x,y, g(x,y)) \, dx \, dy,$$

motsatt fortegn fordi normalen til T_2 må peke ut av V . (nedover, ikke oppover).

La $s(u) = x(u) \vec{i} + y(u) \vec{j}$ være en parametrisering for randen til B . Da er

$$r_3(u,v) = x(u) \vec{i} + y(u) \vec{j} + v \vec{k}$$

en parametrisering for T_3 . Da er

$$\frac{\partial(X,Y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} x'(u) & 0 \\ y'(u) & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{og}$$

$$\int_{T_3} R \, dx \wedge dy = 0.$$

Dermed er

$$\begin{aligned} \int_T R \, dx \wedge dy &= \int_B R(x,y, f(x,y)) - R(x,y, g(x,y)) \, dx \, dy \\ &= \int_B \left[\int_{g(x,y)}^{f(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z} \, dz \right] dx \, dy = \iiint_V \frac{\partial R}{\partial z} \, dx \, dy \, dz. \end{aligned}$$

Divergensteorem, område med hull

Eksempel La $F(x, y, z) = \frac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{r^3}$,

der $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$.

Vi regner, $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} \cdot 2x = \frac{x}{r}$

$F = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$, $P = \frac{x}{r^3}$, $Q = \frac{y}{r^3}$, $R = \frac{z}{r^3}$.

$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{1}{r^3} - \frac{3x}{r^4} \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{r^3} - \frac{3x}{r^4} \left(\frac{x}{r} \right) = \frac{r^2 - 3x^2}{r^5}$.

Da er $\text{div } F = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$

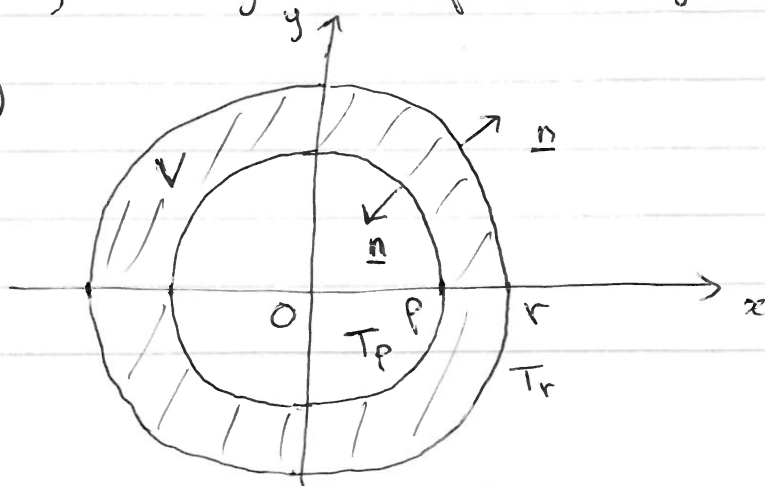
$$= \left(\frac{r^2 - 3x^2}{r^5} \right) + \left(\frac{r^2 - 3y^2}{r^5} \right) + \left(\frac{r^2 - 3z^2}{r^5} \right) = \frac{3r^2 - 3(x^2 + y^2 + z^2)}{r^5} = 0.$$

Da er $\iiint_V \text{div } F \, dx \, dy \, dz = 0$

Så længe V ikke inneholder origoen.

Eksempel av V , Velg $0 < \rho < r$ og la

$V = B(0, r) \setminus B(0, \rho)$



Hvis $(x, y, z) \in T_r$ er

$$\begin{aligned}\vec{F} \cdot \vec{n} &= \left(\frac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{r^3} \right) \cdot \left(\frac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{r} \right) \\ &= \frac{x^2 + y^2 + z^2}{r^4} = \frac{r^2}{r^4} = \frac{1}{r^2}.\end{aligned}$$

Da er

$$\begin{aligned}\int_{T_r} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS &= \frac{1}{r^2} \int_{T_r} 1 \, dS = \frac{1}{r^2} \text{areal}(T_r) \\ &= \frac{4\pi r^2}{r^2} = 4\pi.\end{aligned}$$

Hvis $(x, y, z) \in T_e$ er

$$\begin{aligned}\vec{F} \cdot \vec{n} &= \left(\frac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{e^3} \right) \cdot \left(- \left(\frac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{e} \right) \right) \\ &= -\frac{1}{e^2}.\end{aligned}$$

$$\text{Da er } \int_{T_e} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = -4\pi$$

$$\begin{aligned}\text{Da er } \int_T \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS &= \int_{T_r} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS + \int_{T_e} \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS \\ &= 4\pi + (-4\pi) = 0.\end{aligned}$$

Stokes' teorem

La D være en positivt orientert kurve i (u,v) -planet, som avgrenser et område A .
La T være den parametriserte flaten gitt ved $\vec{r}: A \rightarrow \mathbb{R}^3$, og la $C = \vec{r}(D)$.
Da er

$$\int_T \text{curl } \vec{F} \cdot \vec{n} \, dS = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

For et vektorfelt $\vec{F}$ med kontinuerlige part. deriv. i T .

