

Fra Sætning 5.1.6 følger følgende regler:

La $\{\vec{x}_n\}$ og $\{\vec{y}_n\}$ være følger i $\mathbb{R}^m$
som konvergerer til $\vec{x}$ og $\vec{y}$ henholdsvis
og la $c \in \mathbb{R}$.

$$(i) \lim_{n \rightarrow \infty} (c \vec{x}_n) = c \vec{x}$$

$$(ii) \lim_{n \rightarrow \infty} (\vec{x}_n + \vec{y}_n) = \vec{x} + \vec{y}$$

$$(iii) \lim_{n \rightarrow \infty} (\vec{x}_n - \vec{y}_n) = \vec{x} - \vec{y}$$

$$(iv) \lim_{n \rightarrow \infty} (\vec{x}_n \cdot \vec{y}_n) = \vec{x} \cdot \vec{y}.$$

Setning 5.1.8 Anta at $A \subset \mathbb{R}^m$ er lukket og at $\{\vec{x}_n\}$ er en følge i A som konvergerer til et punkt $\vec{x} \in \mathbb{R}^m$.
Da er $\vec{x} \in A$.

Beris Anta at $\vec{x} \notin A$. Da må $\vec{x}$ være et ytre punkt av A . Da finnes det $r > 0$ slik at kulen $B(\vec{x}, r)$ ikke inneholder noen punkt fra A .
Det betyr at $|\vec{x}_n - \vec{x}| \geq r$ for alle $n \geq 1$ og $\{\vec{x}_n\}$ kan ikke konvergere til $\vec{x}$.
Selvmotsigelse. $\square$

Setning 5.1.9 Anta at $F: A \rightarrow \mathbb{R}^m$, $A \subseteq \mathbb{R}^k$, og at $\vec{a} \in A$. Da er F kontinuerlig i $\vec{a}$ hvis og bare hvis $F(\vec{x}_n) \rightarrow F(\vec{a})$ når $\{\vec{x}_n\}$ er en følge i A som konvergerer til $\vec{a}$.

Beris Anta først at F er kontinuerlig i $\vec{a}$.
La $\{\vec{x}_n\}$ være en følge i A med $\vec{x}_n \rightarrow \vec{a}$ og la $\varepsilon > 0$.
Da finnes det $\delta > 0$ s.a. $|F(\vec{y}) - F(\vec{a})| < \varepsilon$ for alle $\vec{y} \in A$ slik at $|\vec{y} - \vec{a}| < \delta$.
Og da finnes det $N > 0$ s.a. $|\vec{x}_n - \vec{a}| < \delta$ for $n \geq N$.
Da er $|F(\vec{x}_n) - F(\vec{a})| < \varepsilon$ for $n \geq N$.

Anta så at F ikke er kontinuerlig i $\vec{a}$.
Da finnes det $\varepsilon > 0$ s.a. for alle $\delta > 0$ eksisterer det $\vec{x} \in A$ slik at $|\vec{x} - \vec{a}| < \delta$ med $|F(\vec{x}) - F(\vec{a})| \geq \varepsilon$.
Da kan vi finne, for hver $n \geq 1$, et punkt $\vec{x}_n$ i A slik at $|\vec{x}_n - \vec{a}| < \frac{1}{n}$ med $|F(\vec{x}_n) - F(\vec{a})| \geq \varepsilon$.

Følgen $\{\vec{x}_n\}$ konvergerer mot $\vec{a}$ men

følgen $\{F(\vec{x}_n)\}$ konvergerer ikke mot $F(\vec{a})$.

$\square$.

5.2. Kompletthet av $\mathbb{R}^m$

Delfølger Anta at $\{\vec{x}_n\}$ er en følge i $\mathbb{R}^m$ og at

$$n_1 < n_2 < n_3 < \dots < n_k < \dots$$

er en voksende følge av naturlige tall.

La $\vec{y}_k = \vec{x}_{n_k}$, $k=1, 2, 3, \dots$. Da kalles $\{\vec{y}_k\}$ en delfølge av $\{\vec{x}_n\}$.

Setning 5.2.2 Hvis $\{\vec{x}_n\}$ i $\mathbb{R}^m$ konvergerer til $\vec{x}$, konvergerer alle delfølger av $\{\vec{x}_n\}$ til $\vec{x}$.

Bevis La $\{\vec{x}_{n_k}\}$ være en delfølge og

la $\varepsilon > 0$. Da finnes det $N > 0$ s.a.
 $|\vec{x}_n - \vec{x}| < \varepsilon$ for $n \geq N$.

Vi kan da velge $k > 0$ s.a. $n_k \geq N$.
For $k \geq k$ er $n_k \geq n_k$ og da er

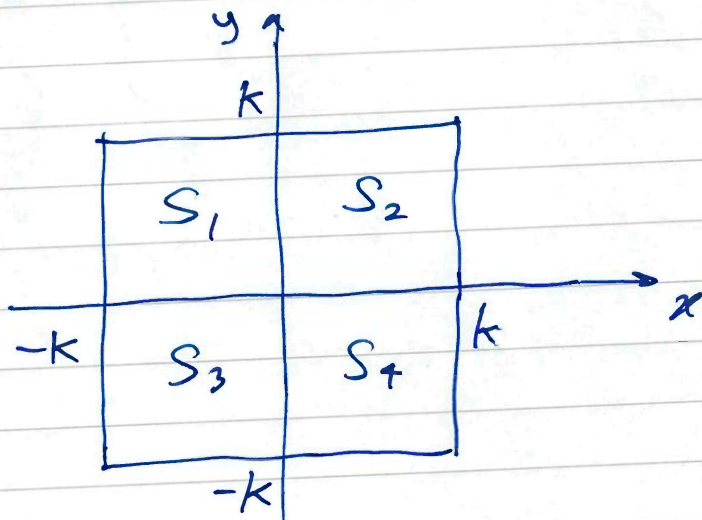
$$|\vec{x}_{n_k} - \vec{x}| < \varepsilon \quad \text{for } k \geq k. \quad \square$$

Siér at en følge $\{\vec{x}_n\}$ i $\mathbb{R}^m$ er begrenset hvis det finnes $k > 0$ slik at $|\vec{x}_n| \leq k$ for alle $n \in \mathbb{N}$.

Teorem Bolzano-Weierstrass

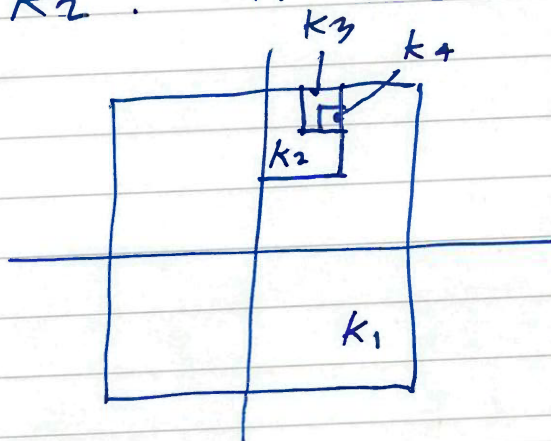
Alle begrensede følger i $\mathbb{R}^m$ har en konvergent delfølge.

Beris. Vi viser det bare for en følge $\{\vec{x}_n\}$ i $\mathbb{R}^2$. Siden $\{\vec{x}_n\}$ er begrenset finnes det k s.a. alle punktene $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$ ligger i $[-k, k] \times [-k, k]$. Vi deler kvadratet i fire mindre kvadrater S_1, S_2, S_3, S_4 :



Minst ett av kvadratene må inneholde uendelig mange ledd i $\{\vec{x}_n\}$. Kall dette kvadratet K_1 . Vi deler nå K_1 i fire på samme måte. Minst ett av de må inneholde uendelig mange ledd i $\{\vec{x}_n\}$. Kall dette K_2 . Vi fortsetter sånn.

Eksempel:



La n_1 være minste tall s.a. $x_{n_1} \in K_1$

La n_2 være minste tall $> n_1$ s.a. $x_{n_2} \in K_2$

$n_3 \quad \dots \quad > n_2$ s.a. $x_{n_3} \in K_3$

OS.V. Da har vi konstruert en delfølge $\{\vec{x}_{n_k}\}$

s.a. $\vec{x}_{n_k} \in K_k$, alle $k \geq 1$.

La (a_k, b_k) være koordinatene til det nedre, venstre hjørnet til K_k .

Det følger at $\{a_k\}$ og $\{b_k\}$ er ikke-avtagende. Da har de grenseverdien a og b . Da konvergerer punktene $\vec{z}_k = (a_k, b_k)$ mot $\vec{z} = (a, b)$.

$$\text{Da er } |\vec{x}_{n_k} - \vec{z}| \leq |\vec{x}_{n_k} - \vec{z}_k| + |\vec{z}_k - \vec{z}| \rightarrow 0$$

når $k \rightarrow \infty$

og dermed er $\lim_{k \rightarrow \infty} \vec{x}_{n_k} = \vec{z}$.

□

Definisjon En følge $\{\vec{x}_n\}$ i $\mathbb{R}^m$ er en Cauchy-følge dersom det for enhver $\varepsilon > 0$ finnes en $N \in \mathbb{N}$ slik at $|\vec{x}_n - \vec{x}_k| < \varepsilon$ for alle $n, k \geq N$.

Lemma 5.2.5. Enhver konvergent følge i $\mathbb{R}^m$ er en Cauchy-følge.

Beris

Anta at $\{\vec{x}_n\}$ konvergerer til $\vec{x}$. La $\varepsilon > 0$. Da finnes det $N \in \mathbb{N}$ slik at $|\vec{x}_n - \vec{x}| < \varepsilon/2$ for $n \geq N$. Hvis både n og k er større enn eller lik N har vi

$$|\vec{x}_n - \vec{x}_k| \leq |\vec{x}_n - \vec{x}| + |\vec{x} - \vec{x}_k| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \quad \square$$

Teorem 5.2.6 Alle Cauchy-følger i $\mathbb{R}^m$ konvergerer.

Beris

Anta at $\{\vec{x}_n\}$ er en Cauchy-følge i $\mathbb{R}^m$. La $\varepsilon = 1$. Da finnes det $N \in \mathbb{N}$ slik at $|\vec{x}_n - \vec{x}_k| < 1$ når $n, k \geq N$, og spesielt er $|\vec{x}_n - \vec{x}_N| < 1$ for alle $n \geq N$. Det betyr at

$$|\vec{x}_n| = |\vec{x}_N + (\vec{x}_n - \vec{x}_N)| \leq |\vec{x}_N| + |\vec{x}_n - \vec{x}_N| < |\vec{x}_N| + 1, \text{ for alle } n \geq N.$$

Det betyr at $\{\vec{x}_n\}$ er begrenset: $|\vec{x}_n| \leq K$ for $n \geq 1$ der

$$K = \max \{ |\vec{x}_1|, |\vec{x}_2|, \dots, |\vec{x}_{N-1}|, |\vec{x}_N| + 1 \}.$$

1 følge Bolzano-Weierstrass-teoremet har $\{\vec{x}_n\}$ en delfølge $\{\vec{x}_{n_k}\}$ med grenseverdi $\vec{x}$.

Vi skal vise at $\{\vec{x}_n\}$ konvergerer mot $\vec{x}$.

La $\varepsilon > 0$. Siden $\{\vec{x}_n\}$ er en Cauchy-følge er det $N \in \mathbb{N}$ slik at $|\vec{x}_n - \vec{x}_k| < \varepsilon/2$

for $n, k \geq N$. Siden $\{\vec{x}_{n_k}\}$ konvergerer mot $\vec{x}$ er det et element $\vec{x}_{n_k}$ slik at $n_k \geq N$ og $|\vec{x}_{n_k} - \vec{x}| < \varepsilon/2$.

Hvis $n \geq N$ er dermed

$$|\vec{x}_n - \vec{x}| \leq |\vec{x}_n - \vec{x}_{n_k}| + |\vec{x}_{n_k} - \vec{x}| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

Korollar (av Lem. 2.5 og Teo. 2.6)
"komplett het av $\mathbb{R}^m$ "

En følge i $\mathbb{R}^m$ konvergerer hvis og bare hvis den er en Cauchy-følge.