

Seksjon 5.3

Uniform kontinuitet

Definisjon La $A \subseteq \mathbb{R}^m$ og $f: A \rightarrow \mathbb{R}$. Vi sier at f er uniformt kontinuerlig dersom for hver $\varepsilon > 0$ finnes en $\delta > 0$ slik at hvis $\vec{u}, \vec{v} \in A$ og $|\vec{u} - \vec{v}| < \delta$ så er $|f(\vec{u}) - f(\vec{v})| < \varepsilon$.

Teorem 5.3.2. Hvis $A \subseteq \mathbb{R}^m$ er lukket og begrenset og f er kontinuerlig på A er f uniformt kontinuerlig på A .

Bøvis Anta at f ikke er uniformt kontinuerlig.

Da finnes det $\varepsilon > 0$ slik at for alle $\delta > 0$ finnes det $\vec{u}, \vec{v} \in A$ med $|\vec{u} - \vec{v}| < \delta$ men $|f(\vec{u}) - f(\vec{v})| \geq \varepsilon$.

Da, for hver $n \in \mathbb{N}$, finnes det $\vec{u}_n$ og $\vec{v}_n$ i A slik at $|\vec{u}_n - \vec{v}_n| < \frac{1}{n}$ med $|f(\vec{u}_n) - f(\vec{v}_n)| \geq \varepsilon$.

Fra Bolzano-Weierstrass har $\{\vec{u}_n\}$ en delfølge $\{\vec{u}_{n_k}\}$ som konvergerer til $\vec{u}$ i $\mathbb{R}^m$. Siden A er lukket er $\vec{u} \in A$. Siden $|\vec{u}_{n_k} - \vec{v}_{n_k}|$ går mot 0 må $\{\vec{v}_{n_k}\}$ gå mot $\vec{u}$.

Hvis f var kontinuerlig måtte både $f(\vec{u}_{n_k})$ og $f(\vec{v}_{n_k})$ konvergere til $f(\vec{u})$ men dette er umulig siden $|f(\vec{u}_{n_k}) - f(\vec{v}_{n_k})| \geq \varepsilon$.

Så f er ikke kontinuerlig. $\square$

Eksempler av f som ikke er ~~kont~~ uniformt kontinuerlig:

$$A = (0, 1), \quad f(x) = \frac{1}{x}$$

$$A = \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2$$

(Teorem 5.3.3. La $A \subseteq \mathbb{R}^m$ være åpen og la $a < b$.
Anta at $G(\vec{x}, t)$ er en funksjon av $m+1$ variable som er kontinuerlig og har kontinuerlige partiellderiverte for alle $\vec{x} \in A$ og $t \in [a, b]$. Da har funksjonen

$$F(\vec{x}) = \int_a^b G(\vec{x}, t) dt, \quad \vec{x} \in A,$$

kontinuerlige partiellderiverte og

$$(\frac{\partial F}{\partial x_i}(\vec{x}) = \int_a^b \frac{\partial G}{\partial x_i}(\vec{x}, t) dt.$$

Beris Bruk uniform kontinuitet av $\frac{\partial G}{\partial x_i}$ på
 $C = \{(\vec{y}, t) : \vec{y} \in \overline{B}(\vec{x}, r), t \in [a, b]\} \dots \quad \square$

Setning 5.3.4 Anta at $A \subseteq \mathbb{R}^m$ er åpen og konveks og at vektorfeltet $\vec{F}: A \rightarrow \mathbb{R}^m$ har kontinuerlige partiellderiverte. Da er $\vec{F}$ konservativt hvis og bare hvis

$$(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}(\vec{x}) = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}(\vec{x}), \quad \vec{x} \in A, \quad i, j = 1, \dots, m.$$

Beris $\vec{F}$ konservativt betyr at det finnes en potensialfunksjon ϕ slik at $\vec{F} = \nabla \phi$.
I så fall er $F_i = \frac{\partial \phi}{\partial x_i}$ og

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}.$$

Andre retning : Velg $\vec{a} \in A$ og la $\vec{r}(t) = \vec{a} + t(\vec{x} - \vec{a})$ for $\vec{x} \in A$, og definer

$$\phi(\vec{x}) = \int_0^1 \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt.$$

Da er ϕ en potensialfunksjon for $\vec{F} \dots \quad \square$

3.
Teorem 6.1.5. Anta at $R = [a, b] \times [c, d]$ og
 $f: R \rightarrow \mathbb{R}$ er kontinuert. Da er f integrerbar
over R .

Beris Siden R er lukket og begrænset er
 f uniformt kontinuert på R ... $\square$

Seksjon 5.4. Iterasjon av funksjoner

1.

La $F: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ være en funksjon. Velg et startpunkt $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^m$. Vi kan da lage en følge $\{\vec{x}_n\}$ ved å sette

$$\vec{x}_1 = F(\vec{x}_0), \quad \vec{x}_2 = F(\vec{x}_1), \quad \dots, \quad \vec{x}_{n+1} = F(\vec{x}_n), \quad \dots$$

Eksempel byttedyr - rovdyr modell.

Anta at x_n er antall byttedyr i et område i år n ,
— y_n — rovdyr — — — i år n .
Antall dyr i år $n+1$ er:

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= ax_n - bx_n y_n \\ y_{n+1} &= cy_n + dx_n y_n \end{aligned}$$

der $a, b, c, d > 0$.

Hvis vi definerer $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ved

$$F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax - bxy \\ cy + dxy \end{pmatrix}$$

får vi $\vec{x}_{n+1} = F(\vec{x}_n)$ der $\vec{x}_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$.

Bestandene følger et bølgemønster.

Eksempel 2 La $f(x) = bx(1-x)$, $x \in [0, 1]$
med $0 \leq b \leq 4$. Da er $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$.

La $x_0 = 0.9$ og $b = 2.8$ og $x_{n+1} = f(x_n)$, $n \geq 0$

Da konvergerer $\{x_n\}$ til et fikspunkt $x \approx 0.64$.

Med høyere verdier av b får vi kaotisk oppførsel.

5.5. Konvergens mot et fikspunkt

2.

Definisjon La $A \subseteq \mathbb{R}^m$ og $\vec{F}: A \rightarrow \mathbb{R}^m$.
Vi sier at $\vec{x} \in A$ er et fikspunkt for $\vec{F}$
hvis $\vec{F}(\vec{x}) = \vec{x}$.

Definisjon La $A \subseteq \mathbb{R}^m$. En funksjon $\vec{F}: A \rightarrow A$
kalles en kontraksjon av mengden A hvis
det finnes et positivt tall $C < 1$ slik at

$$|\vec{F}(\vec{x}) - \vec{F}(\vec{y})| \leq C |\vec{x} - \vec{y}|$$

for alle $\vec{x}, \vec{y} \in A$. Vi kaller C en kontraksjonsfaktor
for $\vec{F}$.

Dersom følgen $\{\vec{x}_n\}$ oppstår når vi itererer
 $\vec{F}$ med $\vec{x}_0$ som startpunkt, ser vi at

$$\vec{x}_1 = \vec{F}(\vec{x}_0), \quad \vec{x}_2 = \vec{F}(\vec{x}_1) = \vec{F}(\vec{F}(\vec{x}_0)), \dots$$

$$\vec{x}_n = \vec{F}(\vec{F}(\dots(\vec{F}(\vec{x}_0))\dots))$$

$$= \vec{F}^{on}(\vec{x}_0),$$

$$\text{der } \vec{F}^{on} = \underbrace{\vec{F} \circ \vec{F} \circ \dots \circ \vec{F}}_n.$$

Lemma 5.5.3 Anta at $\vec{F}: A \rightarrow A$ er en
kontraksjon med kontraksjonsfaktor C . For alle
 $\vec{x}, \vec{y} \in A$ og alle $n \in \mathbb{N}$ er da

$$|\vec{F}^{on}(\vec{x}) - \vec{F}^{on}(\vec{y})| \leq C^n |\vec{x} - \vec{y}|.$$

$\vec{F}^{on}$ er altså en kontraksjon med
kontraksjonsfaktor C^n .

Beris Stemmer for $n=1$ fra definisjon av kontraksjon
For $n=2$,

$$\begin{aligned} |\vec{F}^{o2}(\vec{x}) - \vec{F}^{o2}(\vec{y})| &= |\vec{F}(\vec{F}(\vec{x})) - \vec{F}(\vec{F}(\vec{y}))| \\ &\leq C |\vec{F}(\vec{x}) - \vec{F}(\vec{y})| \leq C^2 |\vec{x} - \vec{y}|. \end{aligned}$$

Forsatt på samme måte for generell $n \geq 1$. $\square$

Hvis $\vec{x}_k$ og $\vec{x}_{k+1}$ er to ledd i følgen får vi

$$|\vec{x}_k - \vec{x}_{k+1}| = |\vec{F}^{ok}(\vec{x}_0) - \vec{F}^{ok}(\vec{x}_1)| \leq C^k |\vec{x}_0 - \vec{x}_1|.$$

Teorem Banachs fikspunktsteorem

Anta at $A \subseteq \mathbb{R}^m$ er lukket og at $\vec{F}: \vec{A} \rightarrow \vec{A}$ er en kontraksjon med faktor C . Da har $\vec{F}$ nøyaktig ett fikspunkt $\vec{x} \in A$. Uansett hvilket punkt $\vec{x}_0 \in A$ vi starter iterasjonen i, vil følgen $\{\vec{x}_n\}$ der $\vec{x}_{n+1} = \vec{F}(\vec{x}_n)$, $n \geq 0$, konvergere mot $\vec{x}$ og

$$|\vec{x}_n - \vec{x}| \leq \frac{C^n}{1-C} |\vec{x}_0 - \vec{x}_1|, \text{ alle } n \in \mathbb{N}.$$

Beris $\vec{F}$ har høyst ett fikspunkt: hvis både $\vec{x}$ og $\vec{y}$ er fikspunkter, er

$$|\vec{x} - \vec{y}| = |\vec{F}(\vec{x}) - \vec{F}(\vec{y})| \leq C |\vec{x} - \vec{y}|$$

og siden $C < 1$ er $|\vec{x} - \vec{y}| = 0$ og $\vec{x} = \vec{y}$.

Neste skritt: la $\vec{x}_0 \in A$ og definer $\{\vec{x}_n\}$ ved

$$\vec{x}_{n+1} = \vec{F}(\vec{x}_n), \quad n \geq 0.$$