

3.

Bevis Stemmer for $n=1$ fra definisjon av kontraksjon

For $n=2$,

$$\begin{aligned} |\vec{F}^{o2}(\vec{x}) - \vec{F}^{o2}(\vec{y})| &= |\vec{F}(\vec{F}(\vec{x})) - \vec{F}(\vec{F}(\vec{y}))| \\ &\leq C |\vec{F}(\vec{x}) - \vec{F}(\vec{y})| \leq C^2 |\vec{x} - \vec{y}|. \end{aligned}$$

Forsøtt på samme måte for generell $n \geq 1$. $\square$

Hvis $\vec{x}_k$ og $\vec{x}_{k+1}$ er to ledd i følgen får vi

$$|\vec{x}_k - \vec{x}_{k+1}| = |\vec{F}^{ok}(\vec{x}_0) - \vec{F}^{ok}(\vec{x}_1)| \leq C^k |\vec{x}_0 - \vec{x}_1|$$

Teorem Banachs fikspunktsteorem

Anta at $A \subseteq \mathbb{R}^m$ er lukket og at $\vec{F}: A \rightarrow A$ er en kontraksjon med faktor C . Da har $\vec{F}$ nøyaktig ett fikspunkt $\vec{x} \in A$. Uansett hvilket punkt $\vec{x}_0 \in A$ vi starter iterasjonen i, vil følgen $\{\vec{x}_n\}$ der $\vec{x}_{n+1} = \vec{F}(\vec{x}_n)$, $n \geq 0$, konvergere mot $\vec{x}$ og

$$|\vec{x}_n - \vec{x}| \leq \frac{C^n}{1-C} |\vec{x}_0 - \vec{x}_1|, \text{ alle } n \in \mathbb{N}.$$

Bevis $\vec{F}$ har høyst ett fikspunkt: hvis både $\vec{x}$ og $\vec{y}$ er fikspunkter, er

$$|\vec{x} - \vec{y}| = |\vec{F}(\vec{x}) - \vec{F}(\vec{y})| \leq C |\vec{x} - \vec{y}|$$

og siden $C < 1$ er $|\vec{x} - \vec{y}| = 0$ og $\vec{x} = \vec{y}$.

Neste skritt: la $\vec{x}_0 \in A$ og definer $\{\vec{x}_n\}$ ved

$$\vec{x}_{n+1} = \vec{F}(\vec{x}_n), n \geq 0.$$

For $1 \leq n < k$ har vi

$$\begin{aligned}
 |\vec{x}_n - \vec{x}_k| &\leq |\vec{x}_n - \vec{x}_{n+1}| + |\vec{x}_{n+1} - \vec{x}_{n+2}| + \dots + |\vec{x}_{k-1} - \vec{x}_k| \\
 &\leq C^n |\vec{x}_0 - \vec{x}_1| + C^{n+1} |\vec{x}_0 - \vec{x}_1| + \dots + C^{k-1} |\vec{x}_0 - \vec{x}_1| \\
 &\leq (C^n + C^{n+1} + \dots + C^{k-1} + \dots) |\vec{x}_0 - \vec{x}_1| \\
 &= \frac{C^n}{1-C} |\vec{x}_0 - \vec{x}_1|. \quad (1)
 \end{aligned}$$

Siden $C < 1$ er $\{\vec{x}_n\}$ en Cauchy-følge og fra Teorem 5.2.6, konvergerer $\{\vec{x}_n\}$ til et punkt $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$. Siden A er lukket er $\vec{x} \in A$.

Siden $\vec{F}$ er en kontraksjon er $\vec{F}$ kontinuerlig. Da er

$$\vec{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \vec{x}_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \vec{F}(\vec{x}_n) = \vec{F}\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \vec{x}_n\right) = \vec{F}(\vec{x})$$

og $\vec{x}$ er et fikspunkt for $\vec{F}$.

Til sist: Siden (1) gjelder for alle $k > n$ får vi at

$$|\vec{x}_n - \vec{x}| = \lim_{k \rightarrow \infty} |\vec{x}_n - \vec{x}_k| \leq \frac{C^n}{1-C} |\vec{x}_0 - \vec{x}_1|. \quad \square$$

Når er $\vec{F}$ en kontraksjon? Her er en tilstrekkelig betingelse.

5.

Setning Anta at $A \subseteq \mathbb{R}^m$ er konveks og $\vec{F}: A \rightarrow A$ er deriverbar. Hvis det er et tall $C < 1$ slik at

$$\sqrt{|\nabla F_1(\vec{c}_1)|^2 + \dots + |\nabla F_m(\vec{c}_m)|^2} \leq C$$

for alle $\vec{c}_1, \vec{c}_2, \dots, \vec{c}_m \in A$ er $\vec{F}$ en kontraksjon med faktor C .

Bervis La $\vec{a}, \vec{b} \in A$. Siden A er konveks ligger linjestykket mellom $\vec{a}$ og $\vec{b}$ i A . For hver $i = 1, \dots, m$, fra Middelverdisetningen for F_i finnes det et punkt $\vec{c}_i \in [\vec{a}, \vec{b}]$ slik at

$$F_i(\vec{b}) - F_i(\vec{a}) = \nabla F_i(\vec{c}_i) \cdot (\vec{b} - \vec{a}).$$

Fra Schwarz' ulikhet er da

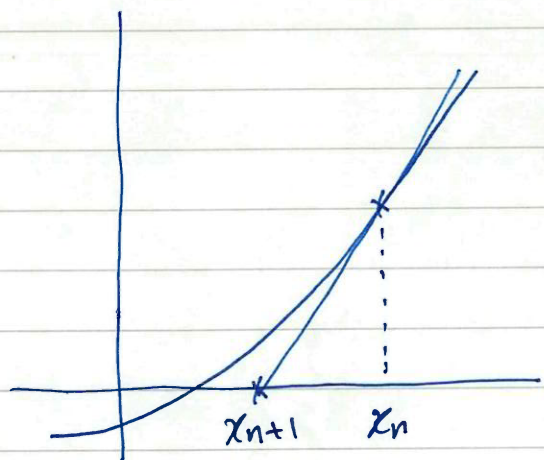
$$|F_i(\vec{b}) - F_i(\vec{a})| \leq |\nabla F_i(\vec{c}_i)| |\vec{b} - \vec{a}|$$

$$\begin{aligned} \text{og } |\vec{F}(\vec{b}) - \vec{F}(\vec{a})| &= \sqrt{(F_1(\vec{b}) - F_1(\vec{a}))^2 + \dots + (F_m(\vec{b}) - F_m(\vec{a}))^2} \\ &\leq \sqrt{|\nabla F_1(\vec{c}_1)|^2 |\vec{b} - \vec{a}|^2 + \dots + |\nabla F_m(\vec{c}_m)|^2 |\vec{b} - \vec{a}|^2} \\ &\leq C |\vec{b} - \vec{a}| \end{aligned}$$

□

Seksjon 5.6 Newtons metode

En variabel : Finn $x \in \mathbb{R}$ slik at $f(x) = 0$.
Bruk skjæringen til tangenten med x -aksen som tilnærming til x .



Tangenten til f i $(x_n, f(x_n))$ er

$$y = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n)$$

Finn x slik at $y = 0$:

$$f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) = 0$$

$$x = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Definer $x_{n+1} = x$. $\Rightarrow x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.

Hvis $\vec{F} : A \rightarrow A$, $A \subseteq \mathbb{R}^m$, $\vec{F}$ deriverbar og

$\vec{F}'(\vec{x}_n)$ inverterbar kan erstatte tangenten med linearisering :

$$\vec{0} = T_{\vec{x}_n}(\vec{F}) = \vec{F}(\vec{x}_n) + \vec{F}'(\vec{x}_n)(\vec{x} - \vec{x}_n).$$

Løser :
$$\vec{x} = \vec{x}_n - (\vec{F}'(\vec{x}_n))^{-1} \vec{F}(\vec{x}_n)$$

La $\vec{x}_{n+1} = \vec{x}$:
$$\vec{x}_{n+1} = \vec{x}_n - (\vec{F}'(\vec{x}_n))^{-1} \vec{F}(\vec{x}_n)$$

Kalles Newtons metode i m variable. Kan betraktes som funksjonsiterasjon

$$\vec{x}_{n+1} = \vec{G}(\vec{x}_n), \text{ der } \vec{G}(\vec{x}) = \vec{x} - (\vec{F}'(\vec{x}))^{-1} \vec{F}(\vec{x}).$$

Eksempel

$$\vec{F}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 y + 1 \\ e^x + y \end{pmatrix}$$

Bruk Newtons metode med startpunkt $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.7 \\ -2.5 \end{pmatrix}$.

Løsning: Vi regner $\vec{F}'\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 2xy & x^2 \\ e^x & 1 \end{bmatrix}$

Metoden er da

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2x_n y_n & x_n^2 \\ e^{x_n} & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x_n^2 y_n + 1 \\ e^{x_n} + y_n \end{bmatrix}$$

Bruk MATLAB/python

Metoden konvergerer raskt når den konvergerer, men vanskelig å garantere konvergens.

Seksjon 5.7 Omvendte og implisitte funksjoner

Teorem Omvendt funksjonsteorem

Anta at $U \subseteq \mathbb{R}^m$ er åpen og $\vec{F}: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ har kont. part. deriv. Anta at $\vec{a} \in U$ og at $\vec{F}'(\vec{a})$ er inverterbar. Da finnes det en omegn U_0 om $\vec{a}$ og en omegn V_0 om $\vec{F}(\vec{a})$ slik at $V_0 = \vec{F}(U_0)$ og restriksjonen $\vec{F}: U_0 \rightarrow V_0$ har en omvendt funksjon $\vec{G}: V_0 \rightarrow U_0$ som er deriverbar på V_0 . Videre er

$$\vec{G}'(\vec{F}(\vec{x})) = (\vec{F}'(\vec{x}))^{-1}, \quad \vec{x} \in U_0. \quad (1)$$

Bervis: bruk Banachs fikspunktteorem.

Bervis for (1)

$$\text{Har } \vec{G}(\vec{F}(\vec{x})) = \vec{x}, \quad \vec{x} \in U_0$$

Deriver hver side (Jacobi matriser):

$$\vec{G}'(\vec{F}(\vec{x})) \vec{F}'(\vec{x}) = I_m$$

$\Rightarrow (1)$

Eksempel $\vec{F}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 2x^2 + 3e^y \\ \sin x + y \end{bmatrix}$ og $\vec{a} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Har $\vec{F}$ en omvendt funksjon i en omegn av $\vec{a}$?

$$\vec{F}'\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 4x & 3e^y \\ \cos x & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{F}'(\vec{a}) = \vec{F}'\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3e \\ 1 & 1 \end{bmatrix}. \text{ Er denne inverterbar?}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 3e & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3e & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3e} & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{3e} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3e} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{F}'(\vec{a}) \text{ er inverterbar med invers } \begin{bmatrix} -\frac{1}{3e} & 1 \\ \frac{1}{3e} & 0 \end{bmatrix}.$$