

Seksjon 5.7 Omvendte og implisitte funksjoner

Teorem Omvendt funksjonsteorem

Anta at $U \subseteq \mathbb{R}^n$ er åpen og $\vec{F}: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ har kont. part. deriv. Anta at $\vec{a} \in U$ og at $\vec{F}'(\vec{a})$ er inverterbar. Da finnes det en omegn U_0 om $\vec{a}$ og en omegn V_0 om $\vec{F}(\vec{a})$ slik at $V_0 = \vec{F}(U_0)$ og restriksjonen $\vec{F}: U_0 \rightarrow V_0$ har en omvendt funksjon $\vec{G}: V_0 \rightarrow U_0$ som er deriverbar på V_0 . Videre er

$$\vec{G}'(\vec{F}(\vec{x})) = (\vec{F}'(\vec{x}))^{-1}, \quad \vec{x} \in U_0. \quad (1)$$

Bervis: bruk Banachs fikspunktteorem.

Bervis for (1).

$$\text{Har } \vec{G}(\vec{F}(\vec{x})) = \vec{x}, \quad \vec{x} \in U_0$$

Deriver hver side (Jacobi matriser):

$$\vec{G}'(\vec{F}(\vec{x})) \vec{F}'(\vec{x}) = I_m$$

$\Rightarrow (1)$.

Eksempel $\vec{F}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 2x^2 + 3e^y \\ \sin x + y \end{bmatrix}$ og $\vec{a} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Har $\vec{F}$ en omvendt funksjon i en omegn av $\vec{a}$?

$$\vec{F}'\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 4x & 3e^y \\ \cos x & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{F}'(\vec{a}) = \vec{F}'\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3e \\ 1 & 1 \end{bmatrix}. \text{ Er denne inverterbar?}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 3e & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3e & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3e} & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{3e} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3e} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{F}'(\vec{a}) \text{ er inverterbar med invers } \begin{bmatrix} -\frac{1}{3e} & 1 \\ \frac{1}{3e} & 0 \end{bmatrix}.$$

Da har $\vec{F}$ en omvendt funksjon $\vec{G}$ i en omegn av $\vec{a}$.

$$\vec{F}(\vec{a}) = \vec{F}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 3e \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{og da er } \vec{G}$$

definert i en omegn av $\begin{bmatrix} 3e \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\text{og } \vec{G}\begin{pmatrix} 3e \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{og } \vec{G}'\begin{pmatrix} 3e \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3e} & 1 \\ \frac{1}{3e} & 0 \end{bmatrix}.$$

Seksjon 5.7 Forts.

Implisitt funksjonsteorem

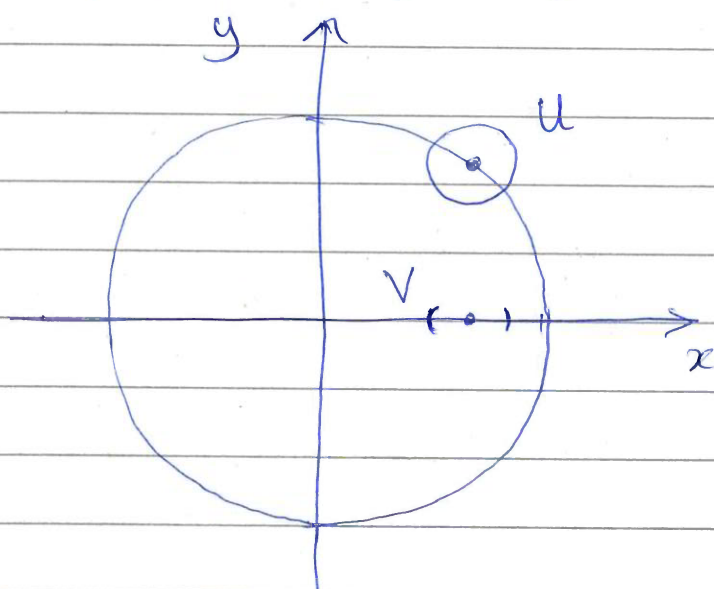
Hvis $f(x,y) = 0$ har en entydig løsning $y = g(x)$ lokalt sier vi at y er implisitt definert av f .

Eksempel

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - 1.$$

Hvis $f(x,y) = 0$ er $x^2 + y^2 = 1$ og

$$y = \pm \sqrt{1-x^2} \quad \text{og} \quad g(x) = \pm \sqrt{1-x^2}.$$



Teorem

Anta at $E \subseteq \mathbb{R}^{m+1}$, $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ har kont. part. der. Vi skriver $f(\vec{x}, y) = f(x_1, \dots, x_m, y)$. Anta at $(\vec{a}, b) \in E$ slik at både $f(\vec{a}, b) = 0$ og $\frac{\partial f}{\partial y}(\vec{a}, b) \neq 0$. Da finnes det omegn $U \subseteq E$ om $(\vec{a}, b)$ og $V \subseteq \mathbb{R}^m$ om $\vec{a}$ slik at for hver $\vec{x} \in V$ er det entydig $y \in \mathbb{R}$ slik at $(\vec{x}, y) \in U$ og $f(\vec{x}, y) = 0$. La $g(\vec{x}) = y$. Da er $g: V \rightarrow \mathbb{R}$ deriverbar og $f(\vec{x}, g(\vec{x})) = 0$ alle $\vec{x} \in V$. Og

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}(\vec{x}) = - \frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{x}, g(\vec{x}))}{\frac{\partial f}{\partial y}(\vec{x}, g(\vec{x}))}, \quad \vec{x} \in V, \quad i=1, \dots, m.$$

Beris Definer $\vec{F}: E \rightarrow \mathbb{R}^{m+1}$ ved

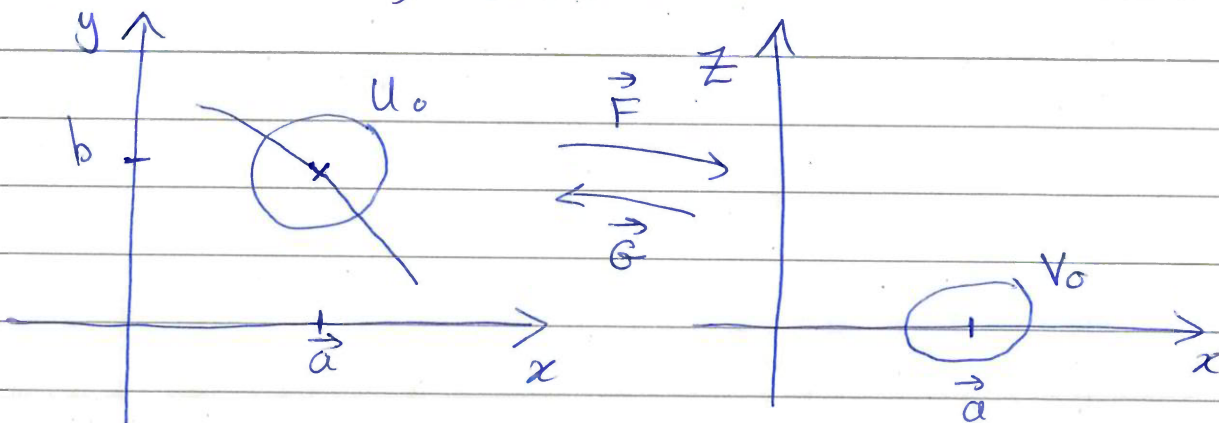
$$\vec{F} \begin{pmatrix} \vec{x} \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{x} \\ F(\vec{x}, y) \end{bmatrix}$$

$$\text{Vi har } \vec{F}' \begin{pmatrix} \vec{x} \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{\text{I}_m} & \overline{0} \\ \frac{\partial F}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F}{\partial x_m} & \frac{\partial F}{\partial y} \end{bmatrix}$$

og dermed er $\det \left(\vec{F}' \begin{pmatrix} \vec{x} \\ y \end{pmatrix} \right) = \frac{\partial F}{\partial y}(\vec{x}, y)$

og $\det \left(\vec{F}' \begin{pmatrix} \vec{a} \\ b \end{pmatrix} \right) \neq 0$ og $\vec{F}' \begin{pmatrix} \vec{a} \\ b \end{pmatrix}$ er inverterbar.

Da kan vi anvende omvendt Funksjonsteorem til $\vec{F}$ i punktet $(\vec{a}, b)$. Siden $\vec{F}(\vec{a}, b) = (\vec{a}, 0)$ finnes det omegn U_0 om $(\vec{a}, b)$ og V_0 om $(\vec{a}, 0)$ slik at $F(U_0) = V_0$ og $\vec{F}: U_0 \rightarrow V_0$ har en omvendt funksjon $\vec{G}: V_0 \rightarrow U_0$ som er deriverbar. $\vec{G}$ må ha formen $\vec{G}(\vec{x}, z) = (\vec{x}, h(\vec{x}, z))$ der h er deriverbar, $(\vec{x}, z) \in V_0$.



$$\text{La } V = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^m : (\vec{x}, 0) \in V_0 \right\}$$

Definer $g(\vec{x}) = h(\vec{x}, 0)$, $\vec{x} \in V$.

Siden $\vec{F}(\vec{G}(\vec{x}, 0)) = (\vec{x}, 0)$ har vi

$$F(\vec{G}(\vec{x}, 0)) = 0 \quad \text{og dermed er } F(\vec{x}, g(\vec{x})) = 0, \\ \vec{x} \in V.$$

Vi kan derivere $F(\vec{x}, g(\vec{x})) = 0$
med hensyn til x_i og kjernerregelen gir

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial x_i} = 0$$

og dermed er

$$\frac{\partial g}{\partial x_i} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x_i}}{\frac{\partial F}{\partial y}}, \quad i = 1, \dots, m. \quad \square$$

Eksempel Når definerer $x^4 y^2 - y z^3 = x z^2$ (1)
 z som en funksjon av x og y ?
Og hva blir $\frac{\partial z}{\partial x}$?

Løsning Sett $f(x, y, z) = x^4 y^2 - y z^3 - x z^2$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 y^2 - z^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = -3y z^2 - 2x z$$

z kan uttrykkes som $z = g(x, y)$ i nærheten
av alle punkter (x, y, z) der $f = 0$
og $\frac{\partial f}{\partial z} \neq 0$. Da får vi

$$\frac{\partial g}{\partial x} = - \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial z}} = - \frac{4x^3 y^2 - z^2}{-3y z^2 - 2x z} \quad (2)$$

Sjekk: betrakt z som funksjon $z = z(x, y)$
og deriver (1) med hensyn på x :

$$4x^3 y^2 - 3y z^2 \frac{\partial z}{\partial x} = z^2 + 2x z \frac{\partial z}{\partial x},$$

$$\Rightarrow 4x^3 y^2 - z^2 = (2x z + 3y z^2) \frac{\partial z}{\partial x}$$

gir (2).

Seksjon 5.8

La $A \subseteq \mathbb{R}^m$ og $f: A \rightarrow \mathbb{R}$. f er begrenset dersom det finnes tall k, M slik at

$$k \leq f(\vec{x}) \leq M, \quad \text{alle } \vec{x} \in A.$$

Et punkt $\vec{c} \in A$ er et maksimumspunkt for f dersom

$$f(\vec{c}) \geq f(\vec{x}), \quad \text{alle } \vec{x} \in A$$

$\vec{c} \in A$ er et minimumspunkt dersom

$$f(\vec{c}) \leq f(\vec{x}), \quad \text{alle } \vec{x} \in A.$$

Ekstremalverdisetningen

Hvis A er lukket og begrenset og f er kontinuerlig, har f et maksimumspunkt og et minimumspunkt og f er begrenset.

Bevis La $M = \sup \{ f(\vec{x}) : \vec{x} \in A \}$ der $M = \infty$ dersom f er ubegrenset. Da kan vi finne en følge $\{\vec{x}_n\}$ i A slik at $\lim_{n \rightarrow \infty} f(\vec{x}_n) = M$. Siden A er begrenset

impliserer Bolzano-Weierstrass teoremet at $\{\vec{x}_n\}$ har en delfølge $\{\vec{x}_{n_k}\}$ som konvergerer til et punkt $\vec{c} \in \mathbb{R}^m$. Siden A er lukket er $\vec{c}$ i A . Siden f er kontinuerlig er

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(\vec{x}_{n_k}) = f\left(\lim_{k \rightarrow \infty} \vec{x}_{n_k}\right) = f(\vec{c}).$$

Samtidig må $\lim_{k \rightarrow \infty} f(\vec{x}_{n_k}) = M$. Det følger at $M = f(\vec{c})$, og $\vec{c}$ er et maksimumspunkt for f og

f er begrenset ovenfra siden $M = f(\vec{z}) < \infty$.

Beviset for et minimumspunkt er helt likt. $\square$

Setning La $A \subseteq \mathbb{R}^m$ og $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ og anta at $\vec{a}$ er et indrepunkt av A .

Hvis $\vec{a}$ er et maksimumspunkt eller minimumspunkt for f og f er deriverbar i $\vec{a}$ må $\nabla f(\vec{a}) = 0$, d.v.s. $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{a}) = 0$,

alle $i = 1, \dots, m$.

Vi kaller et punkt $\vec{a}$ der $\nabla f(\vec{a}) = 0$ et stasjonært punkt for f . Et stasjonært punkt som hverken er et lokalt maksimum eller minimum kalles et sadelpunkt.

Annen derivertstesten, $m = 2$

La $\vec{a}$ være et stasjonært punkt for en funksjon $f = f(x, y)$. Anta at f har kont. annenordens part. deriverte i en omegn av $\vec{a}$. Hesse-matrisen til f i $\vec{a}$ er

$$HF(\vec{a}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\vec{a}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\vec{a}) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\vec{a}) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\vec{a}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix}$$

(HF er symmetrisk) og vi lar

$$D = \det(HF(\vec{a})) = AC - B^2.$$

Da gjelder

- (i) Hvis $D < 0$, så er $\vec{a}$ et sadelpunkt.
- (ii) Hvis $D > 0$ og $A > 0$, så er $\vec{a}$ et lokalt minimum.
- (iii) Hvis $D > 0$ og $A < 0$, så er $\vec{a}$ et lokalt maksimum.
- (iv) Hvis $D = 0$ gir testen ingen konklusjon.

Beris : Se boken : bruk Taylors formel for f av orden 2 og bruk egenverdiene og egenvektorene til $HF(\vec{a})$.

Eksempel La $f(x,y) = 3xy - 3x + 9y$.
Stasjonære punkt ?

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3y - 3, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 3x + 9$$

$\nabla f = 0$ hvis og bare hvis

$$3y - 3 = 0 \quad \text{og} \quad 3x + 9 = 0$$

Det er bare en løsning : $(x,y) = (-3,1)$.

Er (x,y) et maks/min/sadelpunkt ?

$$HF = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix}$$

og $A = C = 0, B = 3$. $D = \det(HF) = AC - B^2 = -9$.

Siden $D < 0$ er $(-3,1)$ et sadelpunkt.