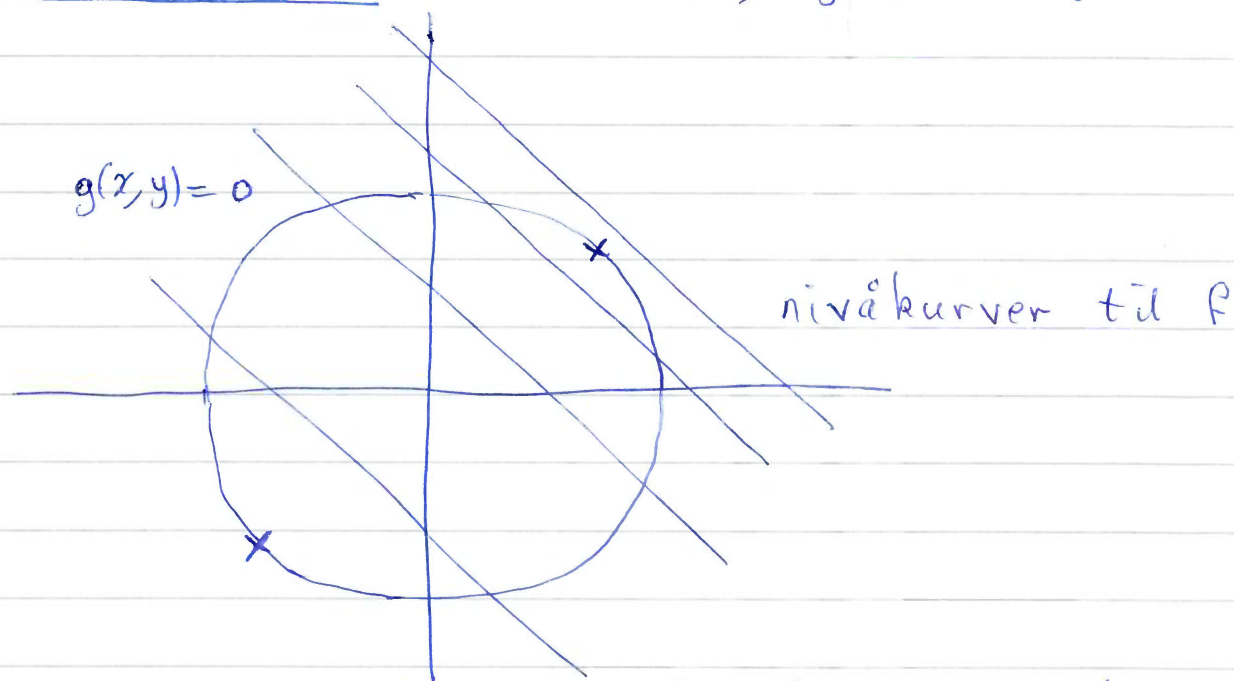


Seksjon 5-10 Lagranges multiplikatormetode

Vil finne maks/min for $f(x_1, \dots, x_m)$
gitt betingelse $g(x_1, \dots, x_m) = 0$

Eksempel, $m=2$

$$f(x,y) = x+y, \quad g(x,y) = x^2 + y^2 - 1$$



Ser at vi maksimerer f når $x=y=\frac{1}{\sqrt{2}}$
Da er $f(x,y) = \sqrt{2}$.

Får et minimum i punktet $x=y=-\frac{1}{\sqrt{2}}$.
Da er $f(x,y) = -\sqrt{2}$.

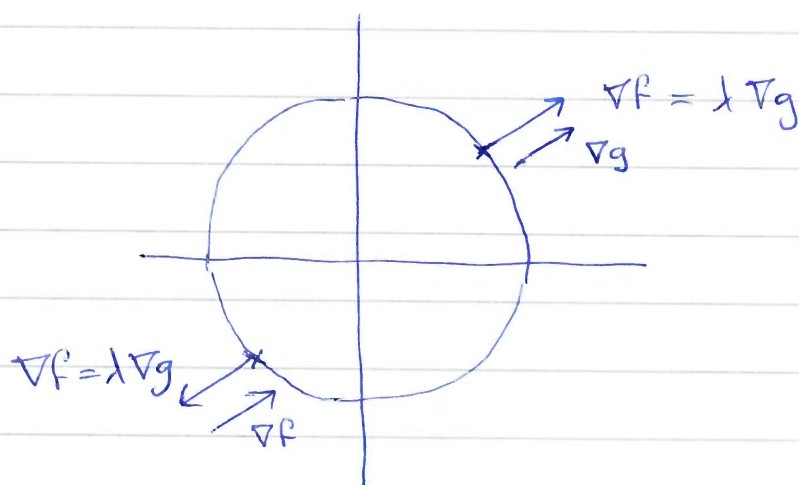
Teorem Anta $U \subseteq \mathbb{R}^m$ åpen, $f, g: U \rightarrow \mathbb{R}$ har
kont. part. deriv. Anta at $\vec{a}$ er et
lokalt ekstremalpunkt for f på U
under betingelsen $g(x_1, \dots, x_m) = 0$.

Da er enten $\nabla g(\vec{a}) = 0$ eller det finnes
en konstant $\lambda \in \mathbb{R}$ slik at

$$\nabla f(\vec{a}) = \lambda \nabla g(\vec{a})$$

Ser at dette stemmer i eksemplet:

$$\nabla f = (1, 1), \quad \nabla g = 2(x, y)$$



Beris Anta at $\nabla g(\vec{a}) \neq 0$. Kan da anta at $\frac{\partial g}{\partial x_m}(\vec{a}) \neq 0$ (hvis ikke kan vi bytte om på

variablene $x_1, \dots, x_m$). Da sier implisitt

Punksjonsteorem at det finnes omegn

V om $(a_1, \dots, a_{m-1})$ i $\mathbb{R}^{m-1}$ og en

Punksjon $\phi: V \rightarrow \mathbb{R}$ slik at

$$g(x_1, \dots, x_{m-1}, \phi(x_1, \dots, x_{m-1})) = 0$$

for alle $(x_1, \dots, x_{m-1}) \in V$ og

$$\phi(a_1, \dots, a_{m-1}) = a_m.$$

Definer $h(x_1, \dots, x_{m-1}) = f(x_1, \dots, x_{m-1}, \phi(x_1, \dots, x_{m-1}))$

Da er $(a_1, \dots, a_{m-1})$ et ekstremalpunkt

for h . Da må $\nabla h = 0$, d.v.s.

$$\frac{\partial h}{\partial x_i} = 0, \quad i=1, \dots, m-1.$$

Fra kjerneregelen er

$$\frac{\partial h}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\partial f}{\partial x_m} \frac{\partial \phi}{\partial x_i}, \quad i=1, \dots, m-1.$$

Da er
$$\frac{\partial \phi}{\partial x_i} = - \frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}}{\frac{\partial f}{\partial x_m}}, \quad i=1, \dots, m-1$$

Fra implisitt funksjonsteorem er

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_i} = - \frac{\frac{\partial g}{\partial x_i}}{\frac{\partial g}{\partial x_m}}, \quad i=1, \dots, m-1$$

Dermed er

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x_m}}{\frac{\partial g}{\partial x_m}} \frac{\partial g}{\partial x_i}, \quad i=1, \dots, m-1$$

Siden dette opplagt gjelder også for $i=m$ får vi

$$\nabla f = \frac{\frac{\partial f}{\partial x_m}}{\frac{\partial g}{\partial x_m}} \nabla g,$$

d.v.s. $\nabla f = \lambda \nabla g$, der $\lambda = \frac{\frac{\partial f}{\partial x_m}}{\frac{\partial g}{\partial x_m}}.$ $\square$

Metode (1) Finn alle punkter $\vec{x}$ der

$$\nabla g(\vec{x}) = 0 \quad \text{og} \quad g(\vec{x}) = 0$$

(2) Finn $\vec{x}$ der $\nabla f(\vec{x}) = \lambda \nabla g(\vec{x})$ og $g(\vec{x}) = 0$ (eliminer λ).

Eksempel 1 Vi vil lage en boks med volum V slik at overflaten har minst mulig areal. Hvordan bør vi velge sidelengdene x, y, z ?

Løsning Siden $V = xyz$ setter vi

$$g(x, y, z) = xyz - V$$

$$\text{Areal} = f(x, y, z) = 2xy + 2xz + 2yz$$

f er definert på

$$U = \{ (x, y, z) : x, y, z > 0 \}$$

$$\nabla f = (2(y+z), 2(x+z), 2(x+y))$$

$$\nabla g = (yz, xz, xy)$$

(1) $\nabla g = 0$ Da må $yz = xz = xy = 0 \Rightarrow$ to av x, y, z må være 0 $\Rightarrow g(x, y, z) = 0 - V = -V \neq 0$
Ingen kandidater her.

(2) $\nabla f = \lambda \nabla g :$

$$\begin{aligned} 2(y+z) &= \lambda yz \\ 2(x+z) &= \lambda xz \\ 2(x+y) &= \lambda xy \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 2x(y+z) = 2(y)(x+z) = 2z(x+y) = 0$$

$$\Rightarrow 2xz = 2yz$$

$$\Rightarrow x = y \quad (z=0 \text{ ikke mulig})$$

På samme måte, $x = y = z$

$$g(x, y, z) = 0 \Rightarrow x = y = z = \sqrt[3]{V}$$

eneste kandidat

Hvorfor er dette et minimum?

f har ingen maks siden vi kan få et så stort areal vi vil ved å lage en boks så flat vi vil.

Eksempel 2 $f(x,y) = x+y$, $g(x,y) = x^2+y^2-1$.
 $\nabla f(x,y) = (1,1)$, $\nabla g(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$.

① $\nabla g = 0 \Leftrightarrow 2x=2y=0 \Rightarrow x=y=0$, origo, men $g(0,0) \neq 0$. Ingen kandidater.

② $\nabla f = \lambda \nabla g$: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 2\lambda x = 1 \\ 2\lambda y = 1 \end{matrix}$

$\Rightarrow x=y$

$x^2+y^2-1=0 \Rightarrow 2x^2-1=0 \quad x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$

To kandidater : $(x,y) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $(x,y) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}$, $f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\sqrt{2}$.

Sirkelen C er lukket og begrenset og f er kontinuert og da har f et maksimum og minimum på C .

De må være $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ og $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Flere betingelser

Teorem 5-10.5

Anta at $\vec{a}$ er et ekstremalpunkt for $f(x_1, \dots, x_m)$ under betingelsene

$$\left. \begin{array}{l} g_1(x_1, \dots, x_m) = 0 \\ \vdots \\ g_k(x_1, \dots, x_m) = 0 \end{array} \right\} \quad (1)$$

Da er enten

① $\nabla g_1(\vec{a}), \dots, \nabla g_k(\vec{a})$ lineært avhengig eller

② Det finnes $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ slik at

$$\nabla f(\vec{a}) = \lambda_1 \nabla g_1(\vec{a}) + \dots + \lambda_k \nabla g_k(\vec{a}). \quad (2)$$

I tilfellet ② får vi k ligninger (1) og m ligninger (2), $m+k$ ligninger tilsammen og vi har $m+k$ ukjente, $x_1, \dots, x_m$ og $\lambda_1, \dots, \lambda_k$. Vi prøver å eliminere $\lambda_1, \dots, \lambda_k$.