5.9 Markovkjeder

Definisjon. En vektor som består av ikke-negative tall med sum 1 kalles en sannsynlighetsvektor. En stokastiske matrise er en kvadratisk matrise der kolonnene i matrisen er sannsynlighetsvektorer.

Eksempel. Ja: $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} 1/5 \\ 4/5 \end{bmatrix}$. Nei: $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} 2/3 \\ 1/4 \end{bmatrix}$.

Eksempel. (Migrasjonsmatrise)

$$P = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.4 & 0.3 \\ 6.1 & 0.6 & 0.1 \\ 0.2 & 0 & 0.6 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{x} = \frac{1}{1164563}\begin{bmatrix} 697010 \\ 259758 \\ 310550 \end{bmatrix}$$

Konvensjon å kalle stokastiske matrise P.

Normalisering.

Merknad. Hvis P er stokastisk og $\vec{x}$ er en sannsynlighets-vektor, så er også $P\vec{x}$ en sannsynlighetsvektor. (Se Oppgave 5.9.29).

Definisjon. En Markovkjede er en stokastisk matrise P og en følge av sannsynlighetsvektorer $\vec{x}_0, \vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots$ relatert ved

$$\vec{x}_{k+1} = P\vec{x}_k.$$

Vektorene kalles tilstandsvektorer og $\vec{x}_0$ initialtilstanden.

Vi er interessert i hva som skjer når $k \to \infty$.

Anvendelser.

① Google-søk. (Oblig 1)

② Optimale strategier i Monopol.

Teorem 5.10 (Forelesning 8)

Hvis P er en stokastisk matrise, så $\lambda = 1$ er en av egenverdiene.

Definisjon. La P være en stokastisk matrise. En sannsynlighets-vektor $\vec{q}$ som oppfyller

$$P\vec{q} = \vec{q}$$

kalles en likevektsvektor.

Oppgave 5.9.22

Er $\vec{q} = \begin{bmatrix} 0.4 \\ 0.4 \end{bmatrix}$ en likevektsvektor for $P = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.8 \\ 0.8 & 0.2 \end{bmatrix}$?

Nei – $\vec{q}$ er ikke en sannsynlighetsvektor. Vi kan sjekke at $P\vec{q} = \vec{q}$. En likevektsvektor er $\begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}$

Eksempel 5.9.5

Finn en likevektsvektor til $P = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.3 \\ 0.4 & 0.7 \end{bmatrix}$.

Løser $(P - I)\vec{x} = \vec{0}$. Altså

$$P - I = \begin{bmatrix} -0.4 & 0.3 \\ 0.4 & -0.3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -0.4 & 0.3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -3/4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Generell løsning oppfyller $x_1 - \frac{3}{4}x_2 = 0$, eller

$$\vec{x} = x_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 4/3 \end{bmatrix}.$$

Vi må ha $x_2(1 + 4/3) = 1$, så $x_2 = 3/7$ og

$$\vec{q} = \begin{bmatrix} 3/7 \\ 4/7 \end{bmatrix}.$$

Merknad. I Eksempel 5.9.5 er det kun én unik likevektsvektor.

Spørsmål. Når kan vi garantere at det finnes en unik likevektsvektor $\vec{q}$ og at $\vec{x}_k \longrightarrow \vec{q}$ for alle valg av initialtilstand $\vec{x}_0$?

Dårlig svar. Ved å kopiere analysen av migrasjonsmatrisen i forelesning 8, får vi følgende betingelse. Hvis

① P er diagonaliserbar,

② $\lambda_1 = 1$ og $|\lambda_j| < 1$ for $j = 2, 3, \ldots, n$,

③ egenrommet til $\lambda_1 = 1$ er 1-dimensjonalt,

så finnes en unik $\vec{q}$ og $\vec{x}_k \to \vec{q}$ for alle initialtilstander $\vec{x}_0$.