Eksempel. (Migrasjonsmatrise med fire byer)

$$P = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.3 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0.7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.8 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0.9 \end{bmatrix}$$

Her vil det være en likevektsvektor for hvert par av byer.

Vi vil ha en mer generell betingelse som er lettere å sjekke.

Definisjon. En stokastisk matrise P kalles regulær dersom det finnes et tall k slik at alle tallene i matrisen

$$P^k = \underbrace{P \cdot P \cdots P}_{k \text{ ganger}}$$

er positive.

Oppgave 5.9.10 Er $P = \begin{bmatrix} 0 & 0.7 \\ 1 & 0.3 \end{bmatrix}$ regulær?

$$P^2 = P \cdot P = \begin{bmatrix} 0 & 0.7 \\ 1 & 0.3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0.7 \\ 1 & 0.3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.21 \\ 0.3 & 0.79 \end{bmatrix}$$

Ja, P er regulær.

Eksempel (Migrasjonsmatrise)

$$P = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.4 & 0.3 \\ 0.1 & 0.6 & 0.1 \\ 0.2 & 0 & 0.6 \end{bmatrix}.$$

Ja, den er regulær.

Teorem 5.11 (Markovs teorem)

La P være en $n \times n$ regulær stokastisk matrise.

① P har en unik likevektsvektor $\vec{q}$.

② For alle initialstander $\vec{x}_0$, så vil Markovkjeden

$$\vec{x}_{k+1} = P\vec{x}_k$$

konvergere mot $\vec{q}$.

Definer absoluttverdien til $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ ved

$$|\vec{x}| = \sum_{j=1}^{n} |x_j|.$$

Da er det klart at $|\vec{x} - \vec{y}| = 0 \iff \vec{x} = \vec{y}$. For en $n \times n$ matrise A, definerer vi

$$\operatorname{diam}(A) = \max_{1 \le i,j \le n} |\vec{a}_i - \vec{a}_j| \quad \text{der} \quad A = [\vec{a}_1 \ \vec{a}_2 \ \cdots \ \vec{a}_n].$$

Lemma 1

La A være en $n \times n$ matrise. Hvis $\vec{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$ oppfyller $y_1 + \cdots + y_n = 0$, så er

$$|A\vec{y}| \le \frac{\operatorname{diam}(A)}{2} |\vec{y}|.$$

Lemma 2

Hvis P er en stokastisk matrise hvor alle tallene i P er positive, så er $\operatorname{diam}(P) < 2$.

Bevis. Hvis $a, b > 0$, så er $|a - b| < a + b$. Følgelig,

$$|\vec{p}_i - \vec{p}_j| = \sum_{\ell=1}^{n} |p_{\ell i} - p_{\ell j}| < \sum_{\ell=1}^{n} (p_{\ell i} + p_{\ell j}) = 1 + 1 = 2. \quad \square$$

Bevis for Teorem 11.

Tar bare $k=1$, det generelle er ikke mye vanskeligere. Da kan vi anta at P er stokastisk og at alle tallene i P er positive.

① Anta at $\vec{q} \neq \vec{r}$ er likevektsvektorer for P. Siden begge har sum 1, så vil $\vec{y} = \vec{q} - \vec{r}$ ha sum 0. Vi får

$$|\vec{q} - \vec{r}| \underset{\text{Likevekt.}}{=} |P\vec{q} - P\vec{r}| = |P(\vec{q} - \vec{r})| = |P\vec{y}|$$

$$\text{Lemma 1} \rightarrow \le \frac{\operatorname{diam}(P)}{2} |\vec{y}|$$

$$\text{Lemma 2} \rightarrow < |\vec{y}| = |\vec{q} - \vec{r}|.$$

Motsigelse, og antagelsen $\vec{q} \neq \vec{r}$ er feil.

② La $\vec{x}_0$ være en initialtilstand. Da er

$$|\vec{x}_{k+1} - \vec{q}| = |P\vec{x}_k - P\vec{q}| = |P(\vec{x}_k - \vec{q})|$$

$$\text{Lemma 1} \rightarrow \le \frac{\operatorname{diam}(P)}{2} |\vec{x}_k - \vec{q}|.$$

Ved induksjon

$$|\vec{x}_{k+1} - \vec{q}| \le \left(\frac{\operatorname{diam}(P)}{2}\right)^{k+1} |\vec{x}_0 - \vec{q}|.$$

Siden $\operatorname{diam}(P) < 2$ ved Lemma 2, vil $\vec{x}_{k+1} \rightarrow \vec{q}$. $\square$