Merknader.

- Fungerer (ofte) fint selv om A ikke er diagonaliserbar.
- Hvor raskt potensmetoden konverger avhenger av
$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1}, \dots, \frac{\lambda_n}{\lambda_1}.$$
- Sammenlignet med andre numeriske metoder er potensmetoden god hvis vi har en god gjetning på $\vec{x}_0$.

Hvordan kan vi finne andre egenverdier og egenvektorer?

Merknad. En $n \times n$ matrise A har $\lambda = 0$ som egenverdi hvis og bare hvis A ikke er invertibel.

Teorem.
La A være en $n \times n$ matrise som er invertibel. Da er λ en egenverdi til A hvis og bare hvis $\frac{1}{\lambda}$ er en egenverdi til A^{-1}, med samme egenvektor.

Bevis. Vi har
$$A\vec{x} = \lambda \vec{x} \iff \vec{x} = A^{-1}(\lambda \vec{x}) = \lambda A^{-1}\vec{x}$$
$$\iff \frac{1}{\lambda}\vec{x} = A^{-1}\vec{x}.$$
$\square$

Hvis A er invertibel og λ er den egenverdien med minst absoluttverdi, så er λ^{-1} den egenverdien til A^{-1} med størst absoluttverdi.

Vi kan bruke potensmetoden på A^{-1} for å estimere λ.

Merknad. Hvis egenrommet til den dominante egenverdien har dimensjon > 1, kan vi ikke forutsi hvilken egenvektor potensmetoden finner.

Oppgave 5.8.15 og 5.8.16
La A være en $n \times n$ matrise og anta α ikke er en egenverdi til A. Definer
$$B = (A - \alpha I)^{-1}.$$

① Vis at λ er en egenverdi til A hvis og bare hvis
$$\frac{1}{\lambda - \alpha}$$
er en egenverdi til B, med samme egenvektor.

② Anta at μ er en egenverdi til B. Finn en egenverdi til A som en funksjon av α og μ.

---

① Anta $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$. Da er
$$(A - \alpha I)\vec{x} = \lambda\vec{x} - \alpha\vec{x} = (\lambda - \alpha)\vec{x}$$
og siden $B = (A - \alpha I)^{-1}$ gir dette
$$\vec{x} = B\left((\lambda - \alpha)\vec{x}\right) = (\lambda - \alpha)B\vec{x}.$$
$$\frac{1}{\lambda - \alpha}\vec{x} = B\vec{x}.$$

② Hvis $B\vec{x} = \mu\vec{x}$ så er $\mu = \frac{1}{\lambda - \alpha}$, altså er
$$\lambda = \alpha + \frac{1}{\mu}.$$

Hvis α er nærmest, la oss si, λ_2 til en matrise A, så vil
$$\frac{1}{\lambda_2 - \alpha}$$
være den av egenverdiene til B med størst absoluttverdi.

Algoritme (Invers potensmetode)

① Velg α som er nær, men ulik, en av egenverdiene til A.

② Velg $\vec{x}_0$ slik at den største absoluttverdien til tallene i $\vec{x}_0$ er lik 1.

③ For $k = 0, 1, \dots$
   (a) Løs ligningen $(A - \alpha I)\vec{y}_k = \vec{x}_k$ for $\vec{y}_k$.
   (b) La μ_k være det tallet i $\vec{y}_k$ med størst absoluttverdi.
   (c) Regn ut $\vec{x}_{k+1} = \frac{1}{\mu_k}\vec{y}_k$.
   (d) Regn ut $\nu_k = \alpha + \frac{1}{\mu_k}$.

④ Da er ν_k et estimat for en av egenverdiene til A og $\vec{x}_{k+1}$ et estimat for en tilhørende egenvektor.

Merknad. Det koster mindre regnekraft å løse
$$(A - \alpha I)\vec{y}_k = \vec{x}_k$$
enn å regne ut $B = (A - \alpha I)^{-1}$ og $\vec{x}_{k+1} = B\vec{x}_k$.