5.4 Egenvektorer og lineærtransformasjoner

Definisjon. La T være en lineærtransformasjon på et vektorrom V. En egenvektor til T er en $\vec{x} \neq \vec{0}$ i V slik at

$$T(\vec{x}) = \lambda \vec{x}$$

for et tall λ som kalles en egenverdi.

En funksjon $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kalles glatt dersom de høyere ordens deriverte $f^{(k)}$ for $k = 0, 1, 2, \ldots$ eksisterer og er kontinuerlige.

Eksempel.
La $V = C^{\infty}(\mathbb{R})$ betegne vektorrommet av glatte funksjoner på $\mathbb{R}$. Betrakt lineærtransformasjonen $D : V \to V$ gitt ved

$$(Df)(t) = \frac{d}{dt} f(t).$$

Hva er egenverdiene og egenvektorene?

$$(Df)(t) = \lambda f(t) \iff f'(t) = \lambda f(t) \overset{\text{Kalkulus}}{\iff} f(t) = Ce^{\lambda t}.$$

Alle tall $\lambda \in \mathbb{R}$ er egenverdier til D og egenvektorene er $f(t) = e^{\lambda t}$.

Mål. Representere $T : V \to V$ som en matrise.

La V være n-dimensjonalt og velg en basis

$$\mathcal{B} = \{\vec{b_1}, \vec{b_2}, \ldots, \vec{b_n}\}$$

for V. Vi kan uttrykke enhver $\vec{x} \in V$ unikt som

$$\vec{x} = x_1 \vec{b_1} + x_2 \vec{b_2} + \cdots + x_n \vec{b_n}, \qquad (1)$$

hvor $x_1, x_2, \ldots, x_n$ tall. Siden T er en lineærtransformasjon er

$$T(\vec{x}) = x_1 T(\vec{b_1}) + x_2 T(\vec{b_2}) + \cdots + x_n T(\vec{b_n}), \qquad (2)$$

så T er bestemt av $T(\vec{b_j})$ for $j = 1, 2, \ldots, n$. Vi tar nå koordinattransformasjonen av (1) og (2) med hensyn på basisen B:

$$[\vec{x}]_B = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1 \vec{e_1} + x_2 \vec{e_2} + \cdots + x_n \vec{e_n} \qquad (3)$$

$$[T(\vec{x})]_B = x_1 [T(\vec{b_1})]_B + x_2 [T(\vec{b_2})]_B + \cdots + x_n [T(\vec{b_n})]_B. \qquad (4)$$

Definisjon. Matrisen $[T]_B = [\vec{a_1} \ \vec{a_2} \ \cdots \ \vec{a_n}]$ der

$$\vec{a_j} = [T(\vec{b_j})]_B$$

for $j = 1, 2, \ldots, n$ kalles matrisen til T med hensyn på B.

Sammenligner vi (1), (2), (3) og (4) ser vi at

$$[T(\vec{x})]_B = [T]_B [\vec{x}]_B. \qquad (*)$$

Teorem. La T være en lineærtransformasjon på et n-dimensjonalt vektorrom V med en basis B.

① λ er en egenverdi til T
$\iff$ λ er en egenverdi til $[T]_B$.

② $\vec{x}$ er en egenvektor til T
$\iff$ $[\vec{x}]_B$ er en egenvektor til $[T]_B$.

Bevis. Ved $(*)$ får vi

$$T(\vec{x}) = \lambda \vec{x} \iff [T]_B [\vec{x}]_B = \lambda [\vec{x}]_B. \qquad \square$$

Eksempel 5.4.3 (Utvidet)
La $V = \mathbb{P}_2$ med $\{1, t, t^2\}$ og betrakt de to lineærtransformasjonene

$$(Dp)(t) = \frac{d}{dt} p(t) \quad \text{og} \quad (Ip)(t) = \frac{1}{t} \int_0^t p(s)\,ds.$$

Her er altså

$$[c_0 + c_1 t + c_2 t^2]_B = \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}.$$

Derivasjon. (Kalkulus)
Som i stad $(Dp)(t) = \lambda p(t) \iff p(t) = Ce^{\lambda t}$.
Siden $p \in \mathbb{P}_2$ er det bare $\lambda = 0$ som fungerer.
Egenverdi $\lambda = 0$ og egenvektoren $p(t) = 1$.

Derivasjon. (Matrise)
$b_1(t) = 1$, $b_2(t) = t$ og $b_3(t) = t^2$.

$$(Db_1)(t) = 0 \implies [D(b_1)]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$(Db_2)(t) = 1 \implies [D(b_2)]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$(Db_3)(t) = 2t \implies [D(b_3)]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$[D]_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Siden $[D]_B$ er triangulær er $\lambda = 0$ eneste egenverdi, med egenvektor $[p]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, som svarer til $p(t) = 1$.

Integrasjon (Kalkulus)

$$(Ip)(t) = \lambda p(t) \iff \frac{1}{t} \int_0^t p(s)\,ds = \lambda p(t)$$

$$\iff \int_0^t p(s)\,ds = \lambda t p(t) \iff p(t) = \lambda (p(t) + t p'(t))$$

$$\iff \frac{p'(t)}{p(t)} = \left(\frac{1}{\lambda} - 1\right) \cdot \frac{1}{t} \iff \frac{d}{dt} \ln(p(t)) = \left(\frac{1}{\lambda} - 1\right) \frac{1}{t}$$

$$\iff \ln(p(t)) = c + \left(\frac{1}{\lambda} - 1\right) \ln(t)$$

$$\iff p(t) = \tilde{C}\, t^{\frac{1}{\lambda} - 1}.$$

Siden $p \in \mathbb{P}_2$, så må $\frac{1}{\lambda} - 1 = 0, 1, 2$.

$\lambda = 1$ egenvektor $p(t) = 1$
$\lambda = \frac{1}{2}$ egenvektor $p(t) = t$
$\lambda = \frac{1}{3}$ egenvektor $p(t) = t^2$

Integrasjon (Matrise)
La $b_j(t) = t^j$ for $j = 0, 1, 2$. Da

$$(Ib_j)(t) = \frac{1}{t} \int_0^t b_j(s)\,ds = \frac{1}{t} \int_0^t s^j\,ds = \frac{1}{t} \cdot \frac{t^{j+1}}{j+1} = \frac{t^j}{j+1}.$$

$$(Ib_0)(t) = 1 \implies [I(b_0)]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(Ib_1)(t) = \tfrac{1}{2} t \implies [I(b_1)]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(Ib_2)(t) = \tfrac{1}{3} t^2 \implies [I(b_2)]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/3 \end{bmatrix}$$

Altså blir

$$[I]_B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}.$$

Her kan vi lett lese av egenverdier og egenvektorer.

Vi kan tenke på A (en $n \times n$ matrise) som en lineærtransformasjon på $\mathbb{R}^n$. Noen ganger kan det være lurt å bruke en annen basis enn standardbasisen.

Teorem 5.8
La $B = \{\vec{b_1}, \vec{b_2}, \ldots, \vec{b_n}\}$ for $\mathbb{R}^n$, og la $P = [\vec{b_1} \ \vec{b_2} \ \cdots \ \vec{b_n}]$.
Hvis A og C er $n \times n$ matriser, så er

$$[A]_B = C \iff A = PCP^{-1}.$$

Merknad. A er altså diagonaliserbar hvis og bare hvis det finnes en basis B for $\mathbb{R}^n$ slik at $[A]_B$ er diagonal.

Bevis. La $P = [\vec{b_1} \cdots \vec{b_n}]$ slik at $B = \{\vec{b_1}, \ldots, \vec{b_n}\}$.
Da er koordinatbytte gitt ved P^{-1}, dvs.

$$[\vec{x}]_B = P^{-1} \vec{x}.$$

Altså blir

$$[A]_B = [\,[A\vec{b_1}]_B \cdots [A\vec{b_n}]_B\,]$$
$$= [P^{-1}A\vec{b_1} \cdots P^{-1}A\vec{b_n}] = P^{-1}[A\vec{b_1} \cdots A\vec{b_n}]$$
$$= P^{-1}A[\vec{b_1} \cdots \vec{b_n}] = P^{-1}AP,$$

som er lik $C \iff PCP^{-1} = A$. $\square$

Oppgave 5.4.8
Finn $[A]_B$ hvis $A = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ og $\vec{b_1} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ og $\vec{b_2} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Her er

$$P = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad P^{-1} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

Så altså blir

$$[A]_B = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \text{NOE}.$$

Oppgave 5.4.22

Vis at dersom A og B er similære, så er også A^2 og B^2 similære. Gi et eksempel på at motsatt implikasjon ikke holder.

① $A = PBP^{-1}$. Da kan vi regne

$$A^2 = (PBP^{-1})(PBP^{-1}) = PBIBP^{-1} = PB^2P^{-1}.$$

② $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ og $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. Ikke similære siden de har forskjellige egenverdier. $A^2 = A = B^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, så $A^2 = I \cdot B^2 \cdot I^{-1}$.