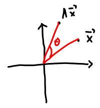
5.5 Komplekse egenverdier

Eksempel. (Rotasjonsmatrise)

La $0 < \theta < \pi$ og betrakt

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$



Siden A er en rotasjon så er det åpenbart at dersom $\vec{x} \neq \vec{0}$, så er $A\vec{x} \neq \lambda\vec{x}$ for alle $\lambda \in \mathbb{R}$. Den karakteristiske ligningen er

$$0 = \det(A - \lambda I) = (\cos\theta - \lambda)^2 + \sin^2(\theta).$$

som har løsning $\lambda = \cos\theta \pm i\sin\theta = e^{\pm i\theta}$. Hvis vi skal ha en egenvektor må vi bruke komplekse tall.

$$(A - e^{i\theta} I) = \begin{bmatrix} \cos\theta - e^{i\theta} & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta - e^{i\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i\sin\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & -i\sin\theta \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\sin(\theta) \neq 0} \sim \begin{bmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{bmatrix} \leftarrow \cdot i \sim \begin{bmatrix} 1 & -i \\ 1 & -i \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -i \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ligningen $(A - e^{i\theta} I)\vec{z} = \vec{0}$ har generell løsning $z_1 - iz_2 = 0$, altså

$$\vec{z} = z_2 \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix},$$

så en kompleks egenvektor er $\vec{v} = \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}$.

Egenverdien $e^{-i\theta}$ har egenvektor $\vec{v} = \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}$.

Teorem.
La A være en $n \times n$ matrise med reelle tall. Hvis λ er en kompleks egenverdi til A med egenvektor $\vec{z}$, så er også $\bar{\lambda}$ en egenverdi med egenvektor $\bar{\vec{z}}$.

Bevis. Siden A er reell, så er $\bar{A} = A$. Altså er

$$A\bar{\vec{z}} = \bar{A}\bar{\vec{z}} = \overline{A\vec{z}} = \overline{\lambda\vec{z}} = \bar{\lambda}\bar{\vec{z}}. \qquad \square$$

Geometrisk klassifisering av 2x2 reelle matriser

① Diagonaliserbare matriser. Her er

$$A = PDP^{-1} \quad \text{for} \quad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

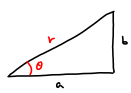
② Én reell egenverdi med geometrisk multiplisitet 1. Her er

$$A = PTP^{-1} \quad \text{for} \quad T = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

③ To komplekse egenverdier (som er konjugerte). Dagens tema!

Eksempel 5.5.6
Betrakt $C = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ for reelle tall a og $b \neq 0$.

$$0 = \det(C - \lambda I) = (a - \lambda)^2 + b^2 \iff \lambda = a \pm ib.$$



$$r = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad \frac{a}{r} = \cos\theta$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) \qquad \frac{b}{r} = \sin\theta$$

Da blir

$$C = r\begin{bmatrix} a/r & -b/r \\ b/r & a/r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

Dette er en roter-og-skaler matrise.

Oppgave 5.5.8
Beskriv den geometriske effekten av $C = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 3 \\ -3 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$.

Her er $a = \sqrt{3}$ og $b = -3$, så

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} = 2\sqrt{3} \quad \text{og} \quad \theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) = \arctan(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3},$$

så vi roterer med $2\pi - \frac{\pi}{3}$ mot klokka og skalerer med $2\sqrt{3}$.

Merknad. Hvis $A = PBP^{-1}$, så har A og B nøyaktig de samme egenverdiene. Hvis A er 2×2 med komplekse egenverdier $a \pm bi$, kan vi fantasere om at

$$A = PCP^{-1} \quad \text{der} \quad C = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}.$$