Eksempel 5.5.2, 5.5.3, 5.5.6 og 5.5.7

$$A = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.6 \\ 0.75 & 1.1 \end{bmatrix}.$$

Egenverdier:

$$0 = \det(A - \lambda I) = (0.5-\lambda)(1.1-\lambda) + 0.75\cdot 0.6$$
$$= \dots = \lambda^2 - \tfrac{8}{5}\lambda + 1.$$

Altså:

$$\lambda = \frac{8/5 \pm \sqrt{(8/5)^2 - 4}}{2} = \dots = \frac{4}{5} \pm \frac{\sqrt{4^2-5^2}}{5} = \frac{4}{5} \pm i\,\frac{3}{5}.$$
$$= 0.8 \pm 0.6i.$$

Egenvektorer: $\lambda_1 = 0.8 - 0.6i$.

$$A - \lambda_1 I = \begin{bmatrix} -0.3+0.6i & -0.6 \\ 0.75 & 0.3+0.6i \end{bmatrix} \leftarrow \cdot\, -0.3+0.6i$$

$$\sim \begin{bmatrix} -0.3+0.6i & -0.6 \\ \tfrac{3}{4}(-0.3+0.6i) & -0.45 \end{bmatrix} \qquad 0.45 = \tfrac{3}{4}\cdot 0.6$$

$$\sim \begin{bmatrix} -0.3+0.6i & -0.6 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot -\tfrac{10}{3} \sim \begin{bmatrix} 1-2i & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Generell løsning av $(A-\lambda_1 I)\vec{z} = \vec{0}$ oppfyller

$$z_1(1-2i) + z_2\cdot 2 = 0.$$

En egenvektor er $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -(1-2i) \end{bmatrix}$. Ved kompleks konjugasjon er egenvektor til $\lambda_2 = 0.8+0.6i$ er $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -(1+2i) \end{bmatrix}$.

Merknad. Læreboken får $-(1+2i)\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} -1-4i \\ 5 \end{bmatrix}$ som sin egenvektor.

I ren desperasjon velger vi $P = [\operatorname{Re} v_1 \;\; \operatorname{Im} v_1] = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$.

Vi regner $P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. Vi vet at

$$A = PCP^{-1} \iff C = P^{-1}AP.$$

Da sjekker vi

$$P^{-1}AP = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.5 & -0.6 \\ 0.75 & 1.1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8 & -0.6 \\ 0.6 & 0.8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix},$$

Matlab eller hardt arbeid.

for $a = 0.8$ og $b = 0.6$. Så C er roter-og-skaler med

$r = \sqrt{0.8^2 + 0.6^2} = 1$ og $\theta = \arctan\left(\frac{0.6}{0.8}\right) = \arctan(3/4) \approx 36.87°$.

Siden $A = PCP^{-1}$ kan vi forklare ellipsebanen vi så i Matlab ved $[A]_B$ er en rotasjon der $B = \left\{\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}\right\}$.

Hadde vi flaks i valg av $P = [\operatorname{Re} v_1 \;\; \operatorname{Im} v_1]$ eller er dette et generelt fenomen?

Merknad. Hvis A er reell, så er $\operatorname{Re}(A\vec{z}) = A\operatorname{Re}(\vec{z})$ og $\operatorname{Im}(A\vec{z}) = A\operatorname{Im}(\vec{z})$. (Oppgave 5.5.29)

Teorem 5.9
La A være en 2×2 reell matrise med egenverdi $\lambda = a - bi$ for $b \neq 0$ og la $\vec{v}$ være en egenvektor til λ. Da er $A = PCP^{-1}$ der

$$P = [\operatorname{Re}\vec{v} \;\; \operatorname{Im}\vec{v}] \quad \text{og} \quad C = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}.$$

Bevis. (Oppgave 5.5.30)
Vi vil vise $A = PCP^{-1} \iff AP = PC$. Regner først

$$PC = [\operatorname{Re}(\vec{v}) \;\; \operatorname{Im}(\vec{v})]\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} = [a\operatorname{Re}(\vec{v}) + b\operatorname{Im}(\vec{v}) \;\;\; -b\operatorname{Re}(\vec{v}) + a\operatorname{Im}(\vec{v})]$$

$$AP = A[\operatorname{Re}(\vec{v}) \;\; \operatorname{Im}(\vec{v})] = [A\operatorname{Re}(\vec{v}) \;\; A\operatorname{Im}(\vec{v})].$$

Må sjekke at kolonnene er like. Minner om $\lambda = a - bi$.

$$A\operatorname{Re}(\vec{v}) = \operatorname{Re}(A\vec{v}) = \operatorname{Re}(\lambda\vec{v}) = a\operatorname{Re}(\vec{v}) + b\operatorname{Im}(\vec{v}).$$
$$A\operatorname{Im}(\vec{v}) = \operatorname{Im}(A\vec{v}) = \operatorname{Im}(\lambda\vec{v}) = a\operatorname{Im}(\vec{v}) - b\operatorname{Re}(\vec{v}). \qquad \square$$

Merknad. Hvordan vet vi at P er invertibel? Hvis P ikke er invertibel, så er

$$\operatorname{Re}(\vec{v}) = c\operatorname{Im}(\vec{v}).$$

Men da er $\operatorname{Re}(\lambda)$ er en egenverdi og $\operatorname{Re}(\vec{v})$ er en egenvektor (sjekk selv). Motsigelse.