5.6 Diskrete dynamiske system

Eksempel 5.6.1 (Rovdyr-byttedyr)

La $\vec{x}_k = \begin{bmatrix} u_k \\ r_k \end{bmatrix}$ der u_k betegner antall ugler og r_k betegner antall rotter (målt i tusen) og k er tiden (målt i måneder). For et positivt tall p har vi

$$u_{k+1} = 0.5\,u_k + 0.4\,r_k$$
$$r_{k+1} = -p\,u_k + 1.1\,r_k$$

Dette kan skrives på matriseform $\vec{x}_{k+1} = A\,\vec{x}_k$ for

$$A = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.4 \\ -p & 1.1 \end{bmatrix}.$$

Hvis $p = 0.104$ har A følgende egenverdier og egenvektorer

$\lambda_1 = 1.02$ og $\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 10 \\ 13 \end{bmatrix}$, $\lambda_2 = 0.58$ og $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Hvis

$$\vec{x}_0 = c_1 \vec{v}_1 + c_2 \vec{v}_2$$

og $c_1 > 0$, så vil

$$\vec{x}_k \approx c_1 \cdot (1.02)^k \begin{bmatrix} 10 \\ 13 \end{bmatrix}.$$

Her vil populasjon av både ugler og rotter vokse. For hver ugle er det omtrent $\frac{13}{10} \cdot 1000 = 1300$ rotter.

Oppgave 5.6.4

Gjenta Eksempel 5.6.1 med $p = 0.125$. $A = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.4 \\ -0.125 & 1.1 \end{bmatrix}$.

Egenverdier:

$$\det(A - \lambda I) = (0.5 - \lambda)(1.1 - \lambda) + 0.125 \cdot 0.4$$
$$= \lambda^2 - 1.6\lambda + 0.55 + 0.05 = \lambda^2 - 1.6\lambda + 0.6$$
$$= (\lambda - 1)(\lambda - 0.6).$$

Egenvektorer:

$$(A - I) = \begin{bmatrix} -1/2 & 2/5 \\ -1/8 & 1/10 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1/2 & 2/5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot (-10) \sim \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ så } \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Tilsvarende, for $\lambda = 0.6$, får vi $\vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$. Da blir

$$\vec{x}_0 = c_1 \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix},$$

og følgelig

$$\vec{x}_k = c_1 \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} + c_2 \cdot (0.6)^k \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} \approx c_1 \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Her vil populasjonen stabilisere seg på $1000 \cdot \frac{5}{4} = 1250$ rotter per ugle.

Eksempel 5.6.2

$A = \begin{bmatrix} 0.8 & 0 \\ 0 & 0.64 \end{bmatrix}$ $\lambda_1 = 0.8$, $\lambda_2 = 0.64$

Vi forventer $\vec{x}_k \to \vec{0}$ og at konvergensen er raskere nær y-aksen. Stabilt.

Siden $A\vec{0} = \vec{0}$ for alle A, kalles $\vec{0}$ for et fikspunkt. I eksempel over er $\vec{0}$ et tiltrekkende fikspunkt.

Eksempel 5.6.3

$A = \begin{bmatrix} 1.44 & 0 \\ 0 & 1.22 \end{bmatrix}$ $\lambda_1 = 1.44$, $\lambda_2 = 1.22$

Dersom $\vec{x}_0 \neq \vec{0}$, så vil $\vec{x}_k \to \infty$. Hvis $\vec{x}_0$ ikke ligger på y-aksen, så vil x-koordinatet dominere. Ustabilt.

Eksempel 5.6.5

$A = \begin{bmatrix} 1.25 & -0.75 \\ -0.75 & 1.25 \end{bmatrix}$ $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1/2$

Vi forventer at $\vec{x}_k \to \infty$ for de fleste startvektorer. Hvis startvektor ligger i egenrommet til $1/2$, så vil $\vec{x}_k \to \vec{0}$. Ustabilt.

Eksempel 5.6.6

$A = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.5 \\ -0.1 & 1 \end{bmatrix}$ $\lambda = 0.9 \pm 0.2i$, $r = |\lambda| = \sqrt{0.85} < 1$

Vi forventer en spiral mot $\vec{0}$. Stabilt.