Decoupling

Dersom A diagonaliserbar, la oss si $A = PDP^{-1}$. Det dynamiske systemet

$$\vec{x}_{k+1} = A\vec{x}_k$$

kan forenkles ved å substituere $\vec{y}_k = P^{-1}\vec{x}_k$.

$$\begin{aligned}
\vec{x}_{k+1} = A\vec{x}_k \quad &\Leftrightarrow \quad \vec{x}_{k+1} = PDP^{-1}\vec{x}_k \\
&\Leftrightarrow \quad P^{-1}\vec{x}_{k+1} = DP^{-1}\vec{x}_k \\
&\Leftrightarrow \quad \vec{y}_{k+1} = D\vec{y}_k.
\end{aligned}$$

Eksamen 2008: Oppgave 3

(a) Vi kan bruke Teorem 5.8 fra forelesning 12 som sier at

$$[T]_{\mathcal{B}} = P^{-1}AP$$

der $P = [\vec{b}_1 \ \vec{b}_2]$. Alternativt, per definisjon er

$$[T]_{\mathcal{B}} = \left[[T(\vec{b}_1)]_{\mathcal{B}} \ [T(\vec{b}_2)]_{\mathcal{B}} \right].$$

Vi regner

$$T(\vec{b}_1) = A\vec{b}_1 = \begin{bmatrix} -2 & 10 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \vec{b}_1 - \vec{b}_2$$

så $[T(\vec{b}_1)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Tilsvarende

$$T(\vec{b}_2) = A\vec{b}_2 = \begin{bmatrix} -2 & 10 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \vec{b}_1 + \vec{b}_2$$

så $[T(\vec{b}_2)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Totalt,

$$B = [T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Her er $B = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ med $a = 1$ og $b = -1$. Så

$r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2}$ og $\theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + 2\pi k = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k$.

Har $r = \sqrt{2}$ og $\theta = 7\pi/4$. Altså er $B = rR_\theta$.

(b) Ved Teorem 5.8 fra forelesning 12 og (a) vet vi nå at

$$A = PBP^{-1}$$

der $P = [\vec{b}_1 \ \vec{b}_2]$ og $B = \sqrt{2}\, R_{7\pi/4}$. Altså er A similær med B og altså er egenverdiene til A det samme som egenverdiene til B. Egenverdiene er altså

$$a \pm bi = 1 \pm i.$$

Siden egenverdiene til A er komplekse, er ikke A (reelt) diagonaliserbar.

La $\lambda = 1 + i$. Da blir

$$(A - \lambda I) = \begin{bmatrix} -3-i & 10 \\ -1 & 3-i \end{bmatrix} \cdot (3+i) \sim \begin{bmatrix} -3-i & 10 \\ -3-i & 10 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -3-i & 10 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Egenvektor $\vec{v} = \begin{bmatrix} 10 \\ 3+i \end{bmatrix}$. Ved kompleks konjugasjon er egenvektor til $\bar{\lambda} = 1 - i$ gitt ved $\overline{\vec{v}} = \begin{bmatrix} 10 \\ 3-i \end{bmatrix}$.

(c) Vi har $A = PBP^{-1}$ der $B = \sqrt{2}\, R_{7\pi/4}$. Da blir

$$C = A^{-1} = (PBP^{-1})^{-1} = PB^{-1}P^{-1}.$$

Vi substituerer $\vec{y}_k = P^{-1}\vec{x}_k$. Da blir

$$\begin{aligned}
\vec{x}_{k+1} = C\vec{x}_k \quad &\Leftrightarrow \quad \vec{x}_{k+1} = PB^{-1}P^{-1}\vec{x}_k \\
&\Leftrightarrow \quad P^{-1}\vec{x}_{k+1} = B^{-1}P^{-1}\vec{x}_k \\
&\Leftrightarrow \quad \vec{y}_{k+1} = B^{-1}\vec{y}_k.
\end{aligned}$$

Siden P^{-1} er invertibel vil $\vec{x}_k \to \vec{0} \Leftrightarrow \vec{y}_k \to \vec{0}$. Siden $B = \sqrt{2}\, R_{7\pi/4}$, så er $B^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} R_{-7\pi/4} = \frac{1}{\sqrt{2}} R_{\pi/4}$. Da blir

$$\vec{y}_k = (B^{-1})^k \vec{y}_0 = \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^k}_{\to 0} \underbrace{R_{k\pi/4}}_{\text{Endrer ikke vektorlengde.}} \vec{y}_0.$$

Altså vil $\vec{y}_k \to \vec{0}$, og altså vil $\vec{x}_k \to \vec{0}$.