5.7 Anvendelser på differensialligninger

Eksempel. Finn den generelle løsningen av $\vec{x}'(t) = D\vec{x}(t)$, der

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Finn den løsningen som oppfyller $\vec{x}(0) = (4,5,6)$.

$$\vec{x}'(t) = D\vec{x}(t) \iff \begin{matrix} x_1'(t) = x_1(t) \\ x_2'(t) = 2x_2(t) \\ x_3'(t) = 3x_3(t) \end{matrix} \iff \begin{matrix} x_1(t) = c_1 e^{t} \\ x_2(t) = c_2 e^{2t} \\ x_3(t) = c_3 e^{3t} \end{matrix}$$

$$\iff \vec{x}(t) = \begin{bmatrix} c_1 e^{t} \\ c_2 e^{2t} \\ c_3 e^{3t} \end{bmatrix}.$$

For å oppfylle $\vec{x}(0) = (4,5,6)$ velger vi $c_1 = 4$, $c_2 = 5$, $c_3 = 6$.

Konklusjon. Hvis matrisen er diagonal, så er alt greit.

Superposisjon. Anta at $\vec{u}(t)$ og $\vec{v}(t)$ løser ligningen

$$\vec{x}'(t) = A\vec{x}(t).$$

Da er

$$\begin{aligned} (a\vec{u}(t) + b\vec{v}(t))' &= a\vec{u}'(t) + b\vec{v}'(t) \\ &= aA\vec{u}(t) + bA\vec{v}(t) \\ &= A(a\vec{u}(t) + b\vec{v}(t)), \end{aligned}$$

så lineærkombinasjonen $a\vec{u}(t) + b\vec{v}(t)$ er også en løsning.

Spørsmål.
Hvor mange lineært uavhengige løsning har

$$\vec{x}'(t) = A\vec{x}(t)$$

dersom A er en $n \times n$ matrise?

Sophus Lies sidespor (På kanten av pensum)

La A være $n \times n$. Hvis verden er rettferdig bør den generelle løsningen av

$$\vec{x}'(t) = A\vec{x}(t) \quad \text{være} \quad \vec{x}(t) = e^{tA}\vec{c}$$

← En vektor.
↑ En matrise???

Vi definerer

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k.$$

Er denne rekken av matriser konvergent? La $A^k = [a_{ij}^{(k)}]_{i,j=1}^{n}$.
Da er

$$\max |a_{ij}^{(k)}| \le n^{k-1} (\max |a_{ij}|)^k \le a^k$$

for en konstant $a \ge 0$ (som avhenger av A). Så rekken er konvergent. Løser dette ligningen?

$$\begin{aligned} \vec{x}'(t) = \frac{d}{dt} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k \vec{c} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k\,t^{k-1}}{k!} A^k \vec{c} \\ &= A \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} A^{k-1} \vec{c} \\ &= A\vec{x}(t). \end{aligned}$$

Ja! Vi får n lineært uavhengige løsninger, ved å velge n lineært uavhengige vektorer $\vec{c}_1, \vec{c}_2, \dots, \vec{c}_n \in \mathbb{R}^n$.

Fun facts.

1. Initialbetingelsen $\vec{x}(0) = \vec{x}_0$ oppfylles ved å velge $\vec{c} = \vec{x}_0$, fordi $e^{0 \cdot A} = I$.
2. e^{tA} er inverterbar og $(e^{tA})^{-1} = e^{-tA}$. Dette kan brukes til å vise at alle løsninger er på formen $e^{tA}\vec{c}$.
3. Hvis $A = PBP^{-1}$, så er $e^{tA} = Pe^{tB}P^{-1}$.

Decoupling.
Anta at A er diagonaliserbar. Sett $P = [\vec{v}_1\ \vec{v}_2 \cdots \vec{v}_n]$, og

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots\ \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Hvis $\vec{y}(t) = P^{-1}\vec{x}(t)$ så gir samme utregning som i Forelesning 14 at

$$\vec{x}'(t) = A\vec{x}(t) \iff \vec{y}'(t) = D\vec{y}(t).$$

Dette gir opphav til følgende oppskrift for å løse

$$\vec{x}'(t) = A\vec{x}(t)$$

dersom A er diagonaliserbar.

1. Diagonaliser A, dvs. skriv $A = PDP^{-1}$.
2. Finn generell løsning av $\vec{y}'(t) = D\vec{y}(t)$.
3. Regn ut $\vec{x}(t) = P\vec{y}(t)$.

Eksempel 5.7.1
Løs $\vec{x}'(t) = A\vec{x}(t)$ for $A = \begin{bmatrix} -1.5 & 0.5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ med $\vec{x}(0) = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix}$.

Det er oppgitt at egenverdiene og egenvektorene er

$$\lambda_1 = -\tfrac{1}{2} \text{ og } \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad \lambda_2 = -2 \text{ og } \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

1. Definerer

$$P = [\vec{v}_1\ \vec{v}_2] = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ og } D = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

2. Løser $\vec{y}'(t) = D\vec{y}(t)$, så

$$\vec{y}(t) = \begin{bmatrix} c_1 e^{-t/2} \\ c_2 e^{-2t} \end{bmatrix}.$$

3. Regner ut

$$\vec{x}(t) = P\vec{y}(t) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \vec{y}(t) = \begin{bmatrix} c_1 e^{-t/2} - c_2 e^{-2t} \\ 2c_1 e^{-t/2} + c_2 e^{-2t} \end{bmatrix}.$$

Da blir

$$\vec{x}(0) = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} \iff \begin{matrix} c_1 - c_2 = 5 \\ 2c_1 + c_2 = 4 \end{matrix} \iff \begin{matrix} c_1 = 3 \\ c_2 = -2. \end{matrix}$$

Merknad. Hvis $\vec{y}'(t) = D\vec{y}(t)$ har løsning $\vec{y}(t) = \begin{bmatrix} c_1 e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ c_n e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$,

og $\vec{x}'(t) = A\vec{x}(t)$, kan initialbetingelsen $\vec{x}(0) = \vec{x}_0$ oppfylles ved å velge

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = P^{-1}\vec{x}_0.$$

I forrige eksempel blir dette

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$